GEOMETRIA INDIVISIBILIBVS CONTINVORVM

Noua quadam ratione promota.

AVTHORE

P. BONAVENTVRA CAVALERIO

MEDIOLANEN.

Ordinis S. Hieron. Olim in Almo Bononien. Archigym. Prim. Mathematicarum Profess.

In hac postrema edictione ab erroribus expurgata.

Ad Illustriss. D. D.

MARTIVM VRSINVM

PENNÆ MARCHIONEM &c.

BONONIÆ, M.DC.LIII.

Ex Typographia de Ducijs. *Superiorum permissu.*

ILLVSTRISSIME

MARCHIO.

LItteris vsq; nascentibus, eos coluit semper honoribus Antiquitas, eosque non morituris obsequijs Posteritas venerabitur Heroas, quos vel cadentes disciplinas tollere, vel iniquis fortunæ casibus oppressos erigere sæpius conspexit; quarè cum ego omni tempore, quantum in me fuit, studiosæ iuuentuti consulere cupierim, & presertim generosę Nobilium propagini Mathematicas disciplinas adamanti, & iamdudum enixè postulanti, vt secundis typis præclarissima eruditissimi Caualerij Geometria mandaretur, illorum votis respondi, quippe dolentibus tam pretiosum opus, translatis aliunde ab huius disciplinæ cultoribus cunctis ferè voluminibus, in Bononiensi solo lucem nactum, tam subito noctē nancisci, nec posse defuncti Auctoris mandata litteris Geometrica schemata legere; quem viua voce in Archigymnasio Bononiensi dictantem primarium Professorē silentes audierant; hinc est, Vir Generosissime, quod ego præfatum opus iterum prælo commisi, vt fæcundissimus parens filios produceret, quos formosos, & sine mendis spectabiles, omni adhibita diligentia, licet aspicere, ac intueri; vnde solùm deerat, cui hos tenues meos labores sacrarem, sortemque huic Geometrico Cælo, forsan casuro, Atlantem inuenirem, cum statim tui nominis fidei, inclyte Marti, ac tutelæ committere decreui; non enim maiori nomini, nobiliori Numini poteram hoc Nobilitatis opusculum dicare, cum natus sis ex nobilissima Vrsinorum familia inter Romanas facilè prima, cuius fumosæ Imagines patentia vndequaq; arctant Palatia, monstrantq; nigricanti colore splendidissimam antiquissimę gentis originem; & qui honorum gradus, qui tituli inueniuntur, quos illa generosissimè non subierit; quæ facta clarissima perleguntur, quę ipsa non peregerit; ab illa, ob seruatos Ciues

ciuicę sunt Coronæ habitæ, ab illa obsessum ab hostibus suam libertatem agnouit Capitolium; illa prudentissimos Patriæ Consules, sapientissimos Romæ Senatores, spectatissimos Vrbi Præfectos, Vigilantissimos Ecclesiæ Vexilliferos peperit; nullus in tota Europa iacet angulus, in quo miranda Vrsinæ domus non conspiciantur monumēta; illam Italicę orę, Hispaniarū Regna, Galliarum Prouincię, remotissima Britanniæ Littora agnoscunt; ab illa domo initæ cum primoribus Regū Coronis sanguinis affinitates, potentissimaq; Germania ab illius nobilissimę familiæ germine Imperij Romani Electores vidit, quam insignem dignitatem ducentis quadraginta annis, & vltra magna cum maiestatę continuauit; insignes titulorum honores, nam alios Comites, alios Marchiones perlegetis; Barones alios, Principes alios, Duces mirabimini; conspicuę dignitates, cum Baiuliui alij, S. Michaelis alij, Rhodi alii eximij Equites fuerint; spectatissima curarum munia, cum ab illa familia suos Cancellarios Sicilia, Priores Aquitania, Campiductores Respublica Veneta, Patriarchas Antiochia, Magnos Insula Melitensis habuerit Magistros; quid dicam de numerosa segete

Episcoporum, Archiepiscoporum, qui non tã subiectis sibi Ciuibus dicuntur præfuisse, quàm summa animi liberalitate, optimis vitæ moribus, præfuisse; quoties verò, & quot purpuratos Principes admirata est Roma, cui nil mirum solet accidere, ac vna totius Christiani orbis summa Capita est adorata; erubescebat illa domus eximios Terris Proceres produxisse, ni etiam Cœlis similes genuisset, fulgentibus inter illos Beatos spiritus summis martyrio Principibus; nec in procreandis fœminis voluit sterilis esse in Viris fæcundissima, cum enituerit miraculis Margherita Virgo, quæ Reginam Vrsinam, Vngariæ Regis Coniugem, suam agnoscens Parentem, sui generis nobilitatẽ cum animi sanctitate coniunxit; longior essem in recensenda tantę stirpis nobilitate, si historiam, non epistolam scriberem, & si illam, me tacente, saxa ipsa, ac monumenta illius celsitudinem non proclamarent; nam Venetijs equestris statua Nicolæ Vrsino ob seruatum ab obsidione Patauium videtur, testantur antiquissimi lapides à familia Vrsina adæquatum olim Capitolium fuisse reconditum, Tabularum leges fuisse seruatas, liberatam à Faliscis Rempublicam, refectos Pontes, Plebem placatam; hic in tuas laudes, Marchio inclyte, libentissimè descenderem, ni mihi silentium tua imponeret modestia; quæ mauult egregia facere, quàm benèfacta palam audire; hoc tamen solum dicam, te his virtutibus, quas in clarissimis tuæ Domus dispersas Viris intellexisti, non degenerasse, teq; vnum insignibus tum animi tum Corporis dotibus tot hominibus respondere; nam si animi celsitudinem spectas, quis te magnificentior, si liberalitatem, quis munificentior, si in rebus peragendis dexteritatem, quis te eruditior, tu enim, omitto cæteras artes, ac scientias, quibus ab ineunte ætate cum maximo progressus censu operam impendisti; mathematica theoremata calles optimè, tu locorum distantias, dissitas littorum regiones, Telluris, ac Pelagi mensuram apprimè cognoscis; non tibi ignoti sunt ortus, & interitus syderum, agnoscis qua parte Cœli serenitates, qua tempestates sint futurę, nec te in immenso latentes Oceano latent arenę; accipe igitur qualecunq; hoc tuum munus, quod tibi libens, ac lubens offero, tuæq; auctoritatis clypeo contra maligni liuoris dentem tutor, ac pater defende, nec doni tenuitatem, sed animum dantis plura daturi, si posset, conspice; oblatum à Mise gratum

tum punicum malum ; ita Deus te diù incolumem ſeruet, vt ex Patriæ bono, Domus, amicorum in terris diù poſsis viuere, dũ me tibi perpetuum clientem polliceor, tuumque patrocinium hoc perenni in te animi mei monumento ſummoperè expoſco,

D. T. Ill.[me]

Addictiſsim. Seruus
Carolus Manoleſſius.

PRÆFATIO.

Neminem profectò mathamaticarum demonſtrationum dulcedinem, vel primoribus labris vix attigiſſe puto, qui (non ſecus ac, mellis in arbore latentis deguſtata paululũ ſuauitate, innumera licet ferientibus certatim aculeis apium caterua deglutientẽ Vrſum ægrè arcere poſſunt) ſummarum, qua illas commitantur difficultatum copia crebris velut ictibus obſiſtente repulſus, ad ſatietatem vſq; eadem vbiq; perfundi totis viribus non contendat. Talia tibi amice Lector, qui melleos hoſce fructus depaſcere conſueſti, cuiſdam in Geometria rei admiranda caſu in me orta ſpeculationis occaſione, parta, huiuſce dulcedinis amore flagranti, libanda propone. Cum ergo ſolidorum, quæ ex reuolutione circa axim oriuntur, geneſim aliquando meditarer, rationemq; gignẽtium planarum figurarum cum genitis ſolidis compararem, maximè ſanè admirabar quod à propriorum parẽtum conditione adeò natæ figuræ degenerarent, vt aliam omninò ab eiſdem rationem ſequi viderentur. Cylindrus enim exempli gratia, in eadem baſi, & circa eundem axim, cùm cono conſtitutus, eſt eiuſdem [a] triplus, cum tamen ex parallelogrammo trianguli dictum conum generantis [b] duplo per reuolutionem oriatur. Similiter ſi in eadẽ baſi, & circa eundem axim, hæmiſphærium, vel hæmiſphæroides, necnon conoides parabolicum, atq; cylindrus, extiterint, hic erit hæmiſphærij, vel hæmiſphæroidis ſexquialter, conoidis verò [c] duplus, cum tamen gignens parallelogrammum dictum cylindrum ad inſcriptum gignentem circulum, ſeu ellipſim, proximè rationẽ habeat, quam quatuordecim, ad vndecim ad parabolã verò ſit in ratione [f] ſexquialtera. Quinimmò & in planis figuris per reuolutionẽ rectarum linearum circa punctum genitis, quales ſunt circuli, eandem varietatem licet experiri. Si enim plures circuli concentrici intelligantur expoſiti radios habentes ex. g. in proportione numerorum ab vnitate deinceps expoſitorum, ipſi circuli non eandem radiorum proportionem conſeruabunt, ſed eam, quã

a 10. Duod. Elem.
b 41. Pri. Elem.
c Coro. 1 34. l. 3.
d Cor. 1. 51. l. 4.
e Arch. de Dim. Circ.
f Prop. 1. l. 4.

g Cor. 1. 11.l.3. eorum [g] quadrata inuicem habebunt. His verò perspectis cum
ad planarum, ac solidarum figurarum quoq; grauitatum centra
respicerem, similemque varietatem nactus essem, adhuc auge-
h Luc.Val 39 l.1 batur admiratio; in cono enim centrum grauitatis [h] est in axe per
quartam partem distans à basi, in triangulo verò ipsum gignen-
i Idem 19. l.1. te est in eodem axe, distans ab eadem per [i] tertiam partem eius-
K Idē 41. l.2. dem axis. Similiter in conoide parabolico illud est in axe per [k]
tertiam partem distans à basi, in parabola verò ipsum generante
l Arch.8. Se.equep per [l] duas tertias eiusdem axis remouetur ab ipsa basi. Cum er-
go talem varietatem in plurimis alijs figuris sæpius, ac sæpè fuissē
meditatus, vbi prius ex. g. cylindrum ex indefinitis numero pa-
rallelogrammis, conum verò in eadem basi, & circa eundē axim
cum cylindro constitutum, ex indefinitis numero triangulis per
axem transeuntibus veluti compactum effingens, habita dictorū
planorum mutua ratione, illicò & ipsorum solidorum ab ipsis ge-
nitorum emergere rationem existimabam, cum iam planè consta-
ret planorum rationi genitorum ab ijsdem solidorum rationem
minimè concordare, figurarum mensuram tali ratione inquiren-
tem oleum, & operam perdere, ac ex inanibus paleis trituram fa-
cturum esse, mihi iure censendum videbatur. Verùm paulò pro-
fundius rem contemplatus in hanc tandem deueni sententiam,
nempè ad rem nostram lineas, & plana, non ad inuicem coinci-
dentia, sed æquidistantia assumenda esse; sic enim in plurimis ra-
tione inuestigata reperij tum corporum proportioni ipsorum plano-
rum, tum planorum proportioni ipsarum linearum proportionem
m Def.1. & 2.l.2. (si eo modo sumantur, quo [m] lib. 2. explicatur) ad amussim in
omnibus respondere. Cylindrum igitur, & conum, iam dictos
non amplius per axem sed æquidistanter basi ceu sectos cōtempla-
tus, eandem sanè rationem habere illa comperij, quæ lib. 2. voco
n Def.1.& 2.l.2. omnia [n] plana cylindri ad omnia plana coni, [o] regula communi
basi (nempè circulorum congeriem, quæ intra cylindrū, & conum,
o Def.1.& 2.l.2. veluti vestigia plani à basi ad oppositam basim continuò illi æqui-
distanter fluentis quodammodo relinqui intelliguntur) ei, quam
habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum
scrutandæ mensuræ iudicaui prius linearum pro planis, & plano-
rum pro solidis rationes indagare, vt illicò ipsarum figurarum
men-

mensuram mihi compararem, res, puto, iuxta vota successit, vt
perlegenti patebit. Artificio autem tali vsus sum, quale ad pro-
positas quæstiones absoluendas Algebratici adhibere solent; qui
quidem numerorum radices, quamuis ineffabiles, surdas, ac igno-
tas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes, multiplican-
tes, ac diuidentes, dummodo propositę rei exoptatam sibi notitiā
enucleare valeant, sua satis obijsse munera sibi persuadent. Non
aliter ipse ergo indiuisibilium siue linearum, siue planorum con-
gerie (ijsdem vt in lib. 2. explicatur assumptis) licet quoad eo-
rundem numerum innominabili, surda, ac ignota, quoad ma-
gnitudinem tamen conspicuis limitibus clausa, ad continuorum
inuestigandam mensuram vsus sum, vt legenti in processu ope-
ris apparebit. Propositum mihi est autem ò Geometra in his se-
ptem libris quamplurium tam planarum, quam solidarum figu-
rarum dimensionem adinuenire, quarum aliquæ etiam ab alijs,
ac præcipuè ab Euclide, & Archimede pertractatę fuerunt, reli-
qua verò nemini, quod sciam hucusq; attentata; vno tamen ex-
cepto Keplero, qui occasione Dolij Austriaci per virgam menso-
riam dimetiendi, postquam in sua [p] Stereometria Archimedea p Kepleri Stereome. tria Doliorum.
summariè ipsius Archimedis adinuenta sibi opportuna recensuit,
nouis aliquando, qualescumq; sint, adiectis rationibus, tandem
eam partem superaddidit, quam Stereometriæ Archimedeæ sup-
plementum nuncupauit, in qua multiplicem Sectionum conica-
rum, Circuli nempè, Parabolæ, Hyperbolæ, & Ellipsis, necnon ea-
rundem portionum circa diuersos axes reuolutionem contempla-
tus, solida numero octuaginta septem, præter quinque Archime-
dea, Sphæram scilicet, Conoides parabolicum, Conoides hyperbo-
licum, Sphæroides oblongum, & prolatum Geometris perquam
eleganti præconio promulgauit. Cum ergo iam expositam me-
tiendarum figurarum nouam, ac, si dicere fas sit, valde compen-
diosam methodum adinuenissem, fœliciter mecum actum esse exi-
stimaui, vt hæc solida, præter illa Archimedea, mihi suppedita-
rentur, circa quæ illius vim ac energiam, experiri liceret. Ne
quis tamen putet me omnium dictorum solidorum dimensionem
fuisse consequutum, sicuti neq; Keplero contingere potuit, nisi
paucorum, nec satis fęliciter, vt prædictam Stereometriam, ac

sup-

supplementum perlegenti constare poterit: satis mihi fuit eorum
aliqua certiori tamem, ni fallor ratione, inuestigare, quæ circi-
ter numero plusquam viginti ennumerari poterunt, præcipuè si
Archimedea in numero computentur, quinq; scilicet pro singulis
quatuor Coni sectionibus, & amplius alia quædam inferius recē-
senda. Vel enim reuolutio fit circa axem dictarum sectionum, &
sic fiunt solida Archimedea, ex circulo nempè Sphæra, ex parabo-
la Conoides parabolicum, ex hyperbola hyperbolicum, & ex ellip-
si sphæroides oblongum, seu proloatum. Vel reuolutio fit circa pa-
q Cor. 14. rallelam axi, extra figuram, sed minimè eandem tangentem con-
34. l. 3. stitutam, & sic ex circulo fit q anulus latus circularis, ex para-
r Cor. 12. bola semianulus latus parabolicus, ex hyperbola r hyperbolicus
51. l. 4. (hos Keplerus tanquam montis Aetnæ cauitatis similes Crate-
s Cor. 16. res vocat) & ex Ellipsi Anulus latus ellipticus, quem idem Ke-
30. l. 5. plerus, velut serto rusticarum puellarum similem, Anulum arduū
t Cor. 14. appellat. Vel reuolutio fit circa parallelam axi, ac figuram tan-
34. l. 3. gentem, & tunc ex circulo fit Anulus u strictus circularis, ex pa-
u Cor. 13. rabola x semianulus strictus parabolicus, ex hyperbola y hyperbo-
34. l. 3. licus, & tandem ex ellipsi, qui pariter Anulus strictus z elliptī-
x Cor. 10. cus nuncupatur. Denique reuolutione facta circa parallelam
51. l. 4. axi, secantemq; figuram in duas portiones inæquales, ex circuli
y Cor. 15. portione maiori fit Malum roseum, ex minori Malum citrium. In
30. l. 5. ellipsi verò ex maiori Malum a cotoneum, & ex minori fit b Oli-
z Cor. 13 ua. Ex parabolæ portione maiori fit c Aceruus maior paraboli-
34. l. 3. cus, ex minori d Aceruus minor: Ex hyperbola portione maiori
a Cor. 19. fit Aceruus maior e hyperbolicus, ex minori Aceruus f minor.
34. l. 3. Hos autem Aceruos minores parabolicos, & hyperbolicos, idem
b Cor. 20. Keplerus cornibus rectis similes existimat, quorum alia sunt acu-
& 22. 34. ta, & alia obtusa, vt in pecudibus, quando primum, inquit, cor-
l. 2. nibus conīscunt. Hæc verò sunt solida numero viginti, quibus
c Cor. 21. etiam Anulus strictus g ellipticus altera parte latior, & Anulus
51. l. 4. latus ellipticus altera parte h strictior, addi possunt, quem Keple-
d Cor. 24. rus Tiara, seu Globo Turcico similem putat, necnon ea solida, quæ
51. l. 4. ex sectionibus i oppositis oriuntur, seu præfata videntur conco-
e Parabolicis conformiter. mitantia. Hæc inquam sunt, quæ ex ennumeratis ab ipso ex-
f Parabolicis cōformiter. cerpsimus examinanda, à quo præter aliqua nomina nihil aliud à
g Cor. 28. 34. l. 3.
h Cor. 29. 34. l. 3.
i Cor. 21. 30. l. 5.
nobis

nobis desumptum est, vt inspicienti manifestum erit. Sciat verò lector nos præter dicta solida alia pariter quamplurima, quæ non sunt ex grege superius enumeratorum, etiam contemplari. Præ cæteris autem maximam huiusce demonstrandi methodi vniuersalitatem non reticebo, quod enim alij de vna, vel saltem paucis solidorum speciebus, nos de infinitis continuò demonstramus, nedum enim hic ex. g. ostenditur k cylindrum coni, vel l prisma pyramidis, in eadem basi, & altitudine cum eo existentis, triplū esse, sed quacumq; in basi variatione facta, quæ nullo assignato numero coarctatur, solidum eidem insistens, quod cylindricum vocamus, esse triplum eius, quod in eadem basi, & altitudine cum eo constitutum, conicum appellamus; quorum quidem solidorū species numero indefinitas esse manifestò apparet: Ex hoc autē vnico exemplo, tamquam ex vngue Leonem, dignoscet studiosus, quanto Geometricus ager per hac fertilior, & amplior fiat, hanc vniuersalitatem namq; circa omnia penè solida à nobis hic considerata iugiter prosequemur. In primo igitur, & secundum Libro, vt plurimum lemmata proponuntur, quæ ad sequentium librorum doctrinam capiendam necessaria videntur, licet in eisdem plurima quoque sint sui gratia simpliciter demonstrata: In 3. 4. & 5. Libro solida examinantur, quæ ex conicis sectionibus suam genesim agnoscunt. In 6. agitur de spatijs helicis, hac solidis ab eisdem genitis, problemataq; circa predemonstrata construuntur. In septimo deniq; Lib. nostram infinitatis indiuisibilium Oceanum emensam ratem, alia instituta methodo, in portū deducimus, vt in illius infinitatis scopulis periclitandi omnis tādem tollatur ambiguitas. Scio tamen hæc prima fronte leuiter perpendentibus, quippe quæ per iamdiù tritam Geometriæ semitam haud fuerint inquisita, minus esse probanda; at qui nauseātis stomaci tumentes flatus initio supprimentes ad extremam huius doctrinæ metam peruenire haud dedignabuntur, fortè super hæc minimè amplius nauseabunt. Ne quis igitur hanc rogo methodum prius damnare velit, quam hæc omnia puro mentis oculo, sinceroq; illius affectu fuerit perlustratus, hic enim tali ratione demonstrata cum aliorum inuentis ad vnguem concordare iugiter animaduertet. Nemo autem hæc aggrediatur, qui sex saltem

k 10. Duodec. Elem.
l Coro. 3. Duod. Elē.
m Def. 3. l. 1.
n Sect. 9. Cor. 4. 34. l. 2.
o Def. 4. l. 1

tem priores Libros, & vndecimum Elementorum non callueriti; quod si in Apollonij, & Archimedis Operibus Lector pariter versatus fuerit, facilius hæc apprehendet, sin minus, quædam pauca, quæ ab ipsis desumpta fuere, poterit supponere. Qui verò viderit Com. de Motu Martis præfati Kepleri per has nostras speculationes planè intelliget, quam facilè in dimensione plani ellipsis potuerit ipse hallucinari, dum omnium distantiarum Planetę à Sole, per ellipticam lineam circumuoluti, mensuram putat æquipollere plani ellipsis mensuræ (quod est quoddam simile errori, in quem initio præsentis speculationis & ipse lapsus eram, putans coincidentia lineas, vel plana, proportionem planorum, seu solidorum, eandem conseruare) licet postmodum & ipse errorem proprium detegat, & quomodo posset illum emendare contendat. His igitur ritè consideratis, neminem fore existimo, qui hanc nouam methodum duxerit aspernendam, quin potius eandē veluit auream clauem, qua summa arcis Geometriæ nonnullas hucusq; occlusas fores reserantes, summis pulcherrimarum speculationum thesauris ditissimi fieri valeamus, albo adiecto calculo, postmodum fortè satius comprobabit.

p Kepleri Cō de motu Martis.

In

In huius Libri Autorem.

Exerit ecce nouos sapies CAVALERIVS ausus
 Archimedæa deficiente manu;
Nempè geometricas ex vmbris eruit artes,
 Queis metiare solum, queis metiare solum.
Egregium mirata VIRI decus, Ars stupet, indè
 Sit ait, ergo meas exuperabis opes?

Anonymus.

In Librum Geometriæ.

Dvm noua peruolųis CAVALERI schemata, deque
 Arte Geometrica prima trophæa refers;
Applaudit dignis tibi Felsina laudibus, & quam
 Suspicit ingenio, voce per astra vehit.
Hinc Archimedis sileant monumenta, reuixit
 Esse Syracusij qui premit acta senis.

Co. Franc. Carolus Caprara Coll. Nob. Alum.

Ad Libri Auctorem.

Vera Geometriæ rectè documenta recludis,
 Quæ minus antiquis emicuere viris.
Sufficis illius noua schemata scilicet artis,
 Percipis vndè decus tu quoquè in orbe nouum.
Emensæ spatium terræ dumque exprimis; indè
 Arripis immensi limina summa Poli.

Petrus Franc. Coruinus Coll. Nob. Alum.

Ad Librum Geometriæ.

Optima si cupias cognoscere schemata Lector,
 Firma Geometrici percipe iura libri.
Aequoris, atquè soli disces spatia alma metiri,
 Ingenij miros arripiesquè modos.
Felsina plaudit ouans, tantoquè superba triumpho,
 Gaudia non vnquam deperitura ciet.

Co. Franc. Carolus Caprara Coll. Nob. Alum.

De

De Libro Geometriæ.

E Xprimit egregiam nobis CAVALERIVS, artem
Ingenioquè refert abdita sensa nouo.
Huic veterum penitus cedunt monumenta virorum,
Vt longè meritis inferiora suis.
Co. Marcus Antonius Herculanus Coll. Nob. Alum.

De Libro Geometriæ.

P Lena Geometricis sunt hęc monumenta figuris,
Quæ BONAVENTVRAE condidit alma manus;
Ingenij vires, & suspice mentis acumen,
Quod meritò æternum concelebrare licet.
Sola latere nequit VIRTVS: hæc sidera tranat,
Imaquè despiciens limina, summa petit.
Marcus à Cartis Coll. Nob. Alum.

Ad Autorem Libri Geometriæ.

I Am noua lux splendet, iam splendor prænitet omnis;
Arte Geometrica, dum noua iura refers.
Lux fuit Architas, lux Archimedis opusquè,
Lux ea sed tenebris consociata fuit;
Lux tua pellucet nulla caligine pressa,
Instar Apollinei sideris instar adest.
Petrus Franc. Coruinus Coll. Nob. Alum.

GEOMETRIÆ CAVALERII LIBER PRIMVS.

In quo præcipuè de sectionibus Cylindricorum, & Conicorum, nec non similibus figuris quædam elementaria præmittuntur; ac aliquæ Propositiones lemmaticæ pro sequentibus Libris ostenduntur.

DIFINITIONES.

A. I. A

CVM duæ rectæ lineæ inuicem parallelæ aliquam tetigerint figuram planam cum illis in eodem plano constitutam, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur, & oppositi vertices puncta contactuum vtriusque dictarum tangentium parallelarum simul comparata; quilibet autem vertices semper intelligentur assumpti respectu cuiuscunque rectæ lineæ dictis tangentibus æquidistantis, quæ infra regula appellatur.

B. B

LIneæ tangentes dicantur, oppositæ tangentes eiusdem figuræ respectu cuiuscumque rectæ lineę eisdem tangentibus æquidistanter ductæ.

C. C.

C Vm earum vnius contactus fuerit in linea, tunc linea contactus vocabitur basis eiusdem figuræ, respectu cuius poterunt dici vertices puncta contactuum alterius tangentis: vel si istius contactus pariter sit in linea, ambæ lineæ contactus, oppositæ bases, sumptæ respectu lineæ contactus, cuiuscumq; lineæ, cui sint æquidistantes.

A A. II.

C Vm plana inuicem parallela tetigerint aliquod solidum, vnumquodq; punctum contactus illius vertex dicatur; & oppositi vertices puncta contactuum vtriusque dictorum tangentium planorum simul comparata: quilibet autem vertices semper intelligantur assumpti respectu cuiuscumq. plani dictis tangentibus æquidistantis, quod infra regula pariter appellatur.

B B.

I Psa tengentia plana dicantur, opposita tangentia plana eiusdem solidi, respectu dicti plani tangentibus æquidistantis assumpta.

C C.

C Vm dictorum tangentium contactus fuerit in plano, tunc vtriusuis tangentium planorum plana contactus bases dicantur, cuius respectu puncta contactus reliqui tangentis plani poterunt vertices appellari, & vtriusq; tangentium planorum contactus plana dicentur, oppositæ bases: cum verò vtriusque contactus fuerit in linea, oppositæ bases lineares ipsæ lineæ contactus vocabuntur.

D D.

C Vm figuræ planæ oppositis tangentibus vtcumq. ductis, & solidę oppositis planis tangentibus, inciderit perpendiculariter recta linea in eadem tangentia terminata, dicetur hæc altitudo propositæ figuræ planæ, vel solidę, respectu dictorum tangentium, vel cuiuscumque eidem æquidistantis, assumpta.

E. E

R Egula appellabitur in planis recta linea, cui quædam lineæ ducuntur æquidistantes, & in solidis, planum, cui quædam plana ducuntur æquidistantia, qualis in superioribus est recta linea, vel planum, cuius respectu sumuntur vertices, vel opposita tangentia, cui vel vtraq; vel alterum tangentium æquidistat.

S C H O L I V M.

H Aec minimè discrepant ab his, quæ in Euclide, Archimede, & Apollonio, circa vertices, bases, altitudines, & tangentia, siue lineas, siue plana, assumuntur; cum, licet vniuersalius, idem, quod ipsi, declarent, vt ijs, qui in supra dictorum auctorum operibus versati sunt innotescet facilè, vnde sine scrupulo assumemus aliquando ex dictis auctoribus, quæ ex consimilibus definitionibus pendent, illis commiscentes, prout opus fuerit, quæ ex his deducuntur.

III.

E Xposita quacumque figura plana, & in eiusdem ambitu sumpto vtcumque puncto, ab eoque ad alteram eiusdem partium ducta quadam recta linea terminata, & super planum propositæ figuræ eleuata, si hæc per ambitum talis figuræ semper æquidistanter cuidam rectæ lineæ moueri intelligatur, donec omnem percurrerit ambitum, alterum eiusdem extremum punctum, quod non fertur per ambitum propositæ figuræ, describet circuitum planæ figuræ ipsi propositæ æquidistantis, vt probabitur. Solidum ergo, quod compræhenditur vtrisq. figuris iam dictis, & superficie linea, quæ reuoluitur, descripta, dicetur: Cylindricus; superficies in reuolutione descripta, nec non quod libet illius frustum, superficies cylindracea: Cylindrici oppositæ bases dictæ figuræ planæ inter se æquidistantes; latus autem cylindrici, quæuis recta in superficie cylindracea oppositas bases pertingens, cui congruit in reuolutione ipsa 6.huius.

ne ipsa linea reuoluta; & tandem regula lateris cylindrici dicetur illa, cui reuoluta semper manet æquidistans.

A. IV.

A E Xposita plana quacumq; figura; extra cuius planum ad vtramuis eiusdem partium quodcũque sit assumptum punctum, si ab eo ad quoduis punctum illius ambitus recta linea ducatur, quæ indefinitè quoq; sit producta, & hęc per eiusdem ambitum moueatur donec ipsum totum percurrerit ambitum; sumptum punctum erit vertex solidi, quod compræhenditur superficie descripta à linea, quæ reuoluitur inter ambitum propositæ figurę, & sumptum punctum clausa, vertex, inquam sumptus respectu propositę figuræ, vt

15. huius. probabitur. Tale solidum autem dicatur; Conicus, cuius basis proposita figura, & vertex dictum punctum; superficies descripta linea, quę reuoluitur, & iacet inter ambitum propositę figuræ, & dictum punctum, & quodlibet illius frustum dicatur: superficie. Conicularis: illæ verò rectæ lineæ, quæ in eadem reperiuntur, quibus congruit reuoluta inter verticem, & ambitum basis conclusa, vocentur, latera eiusdem Conici.

COROLLARIVM.

EX hàc, & antecedenti definitione, petet cylindrum esse cylindricum, & conum esse conicum, eos scilicet, qui ab Apollonio, & Sereno definiuntur.

B.

B CYlindrici recti dicentur, cum eorum latera fuerint ad rectos angulos basibus, scaleni verò, cum non fuerint ad rectos angulos eisdem: Conicorum verò, & cylindricorum frusta vocabuntur, quę per plana basibus parallela (pro conicis versus ipsas bases) ab ijsdem abscinduatur.

V.

AXis, diameter, figuræ planę, vel solidę, ordinatim applicatę ad easdem, lineæ, iuxta quas possunt, &c. no-

mina sectionum conicorum latera recta, seu transuersa; sumantur, prout ab Apollonio definiuntur, hoc tantum animaduerso, me in sequentibus aliquando abuti eisdem nominibus sectionum coni, Parabolæ .s. Hyperbolæ, Ellipsis, & oppositarum sectionum, spatia videlicet intelligens sub illis, & earum basibus, comprehensa, quod ex modo loquendi tunc euidenter cognoscitur. Cætera deniq; Apollonij, & quæ ab Archimede circa Sphęroides, & Conoides, definiuntur, nisi alia afferatur à me definitio, sumantur, prout ab ipsis vsurpantur.

VI.

FIguram planam circa diametrum, vocat Apollonius 1. Conicorum, cum in ea ductis quotuis lineis cuidam æquidistantibus, omnes bifariam à quadam recta linea diuiduntur, quam vocat diametrum, si eas oblique secet, & axem, si eas rectè diuidat, & ipsam figuram circa diametrum, vel axem.

Si ergo figura circa axem, reuoluatur circa eundem donec redeat, vnde discessit, descripta in tali reuolutione ab eadem solida figura dicatur: solidum rotundum, eiusdem verò axis, circa quem fit reuolutio.

VII.

SImiles Cylindrici, & Conici dicantur, quorum bases sunt similes (iuxta definitionem 10. similium figurarum infra positam, subintellige, vel iuxta aliorum definitiones, quas cum prędictam concordare infra ostendemus) in quibus sumptis duabus homologis lineis, vel lateribus vtcumque, & per ipsas, & latera extensis planis ipsa ad eandem partem ęquè ad bases inclinantur, horumq. conceptę in eisdem figurę sunt similes, nempè similia parallelogramma in cylindricis, & similia triangula in conicis, quorum homologa latera sint sumptę in basibus homologę.

VIII.

SImiles sphęroides dicentur, quę ex similium ellipsium reuolutione oriuntur.

Simi-

IX.

SImiles portiones ſpherarum, vel ſperoidum, & ſimiles Conoides, ſiue Conoidum portiones appellabimus, quando per axes ductis planis ad rectos angulos baſibus conceptę in eiſdem ſolidis figurę ſimiles erunt (iuxta deſinit. 10. ſubſequentem, vel etiam iuxta aliorum definitiones de ſimilibus figuris planis allatas, ſubintellige) quarum, & baſium communes ſectiones ſint homologę baſium diametri, quę vel circuli ſint, vel ſimiles ellipſes.

SCHOLIVM.

CAetræ d finitiones ab Euclide ſimilium planarum figurarum, & ſolidorum, & ſimilium Cylindrorum, & Conorum, & quę ab Apollonio lib. 6. Conicorum, referente Eutocio, fiunt ſimilium ſectionum Coni portionum, ſumantur, vt ab ipſis afferuntur, adiuncto tamen definitioni ſimilium ſectionum Coni portionum ibidem ab Apollonio allatæ, ſi pro ſpatijs vſurpetur quam infra dicetur.

A. X.

A SImiles figurę planę in vniuerſum vocentur, in quarum ſingulis oppoſitę tangentes ita duci poſſunt, & in eaſdem tangentes ita incidere ad eundem angulum, ex eadem parte rectę lineæ in illis terminatę, vt, ſi intra dictas oppoſitas tangentes eiſdem æquidiſtantes vtcumq; ductę fuerint rectę lineæ, eas, quę incidunt dictis tangentibus, ſimiliter ad eandem partem ſecantes; reperiamus harum parallelarum, nec non & oppoſitarum tangentium eas portiones, quę inter dictas incidentes, & circuitus figurarum ad eandem partem ſitę ſunt, eodem ordine ſumptas, eandem inter ſe rationem habere, quam rectæ lineæ, quę dictis tangentibus inciderunt, & in eaſdem terminantur.

B.

B IPſę autem quę dictis tangentibus incidunt, & in eas terminantur, dicentur; Incidentes dictarum tangentium oppoſitarum, & figurarum.

C.

C QVę verò dictis tangentibus oppoſitis æquidiſtant, & diuidunt productę, ſi opus ſit, ſimiliter ad eandem partem ipſas incidentes, necnon oppoſitarum tangentium portiones, quę in ſimilibus figuris iam dictis reperiuntur, vocentur; homologæ earumdem, ſumptę regula qualibet earum; dicantur autem lineæ homologę, quę ſunt intra ambitum ſimilium figurarum, quę verò in ambitu, latera homologa. Ipſę verò tangentes etiam, tangentes earumdem homologarum.

D. IV.

D CVm verò duę ſimiles figuræ planæ in eodem plano, vel in planis ęquidiſtantibus ita poſitę fuerint, vt earum, & oppoſitarum tangentium, quę ſunt regulę homologarum earumdem, incidentes vel ſint ſuperpoſitę, vel ſibi inuicem ęquidiſtent, homologis earumdem figurarum, & homologis partibus ipſarum incidentium, ad eandem partem conſtitutis, ipſæ figurę ſimiles dicantur etiam, inter ſe ſimiliter poſitę; ſiue à ſuis lineis, vel lateribus homologis ſimiliter deſcriptæ.

E.

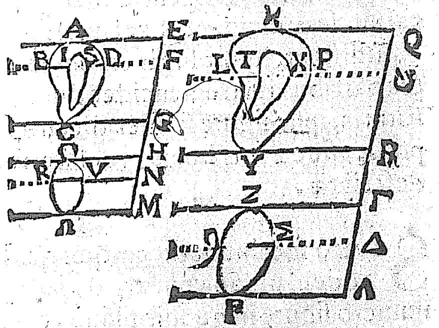
E SI verò fuerint quotcumq; & qualeſcumq; figurę planę in eodem plano vtcumq; diſpoſitę; fuerint autem alię tot numero figurę in quouis plano, cum prędictis ita ſe habentes, vt binę ſint ſimiles, & earum omnium lineę homologę duabus quibuſdam ſint æquidiſtantes; ductis verò oppoſitis tangentibus ſingularum ſimilium figurarum, quę ſint parallelę illis duabus, quibus homologę earumdem æquidiſtant, & repertis incidentibus duarum ex dictis ſimilibus figuris, & earum tangentium, illę productę fuerint vſq; ad extremas tangentes, reperiamus autem eaſdem à tangentibus ſimilium figurarum ſimiliter ad eandem partem diuidi, quarum portiones inter oppoſitas tangentes ſimilium figurarum iacentes ſint earundem oppoſitarum tangentium, &

similium figurarum incidentes. Tales figuræ dicentur bi-næ similes, & similiter inter se positę primò dictæ, ac secundò dictæ, & earum, ac exremarum tangentium etiam dicentur incidentes, quæ in tangentium extremas terminantur.

APPENDIX PRIOR

Pro explicatione Definit. 10. antecedentis.

Sint duæ figuræ planæ. ABCD, KLYP, in quibus supponantur ductæ oppositæ tangentes, AE, CG, in figura, ABCD, & KQ,
B. Def. 1. *Y℞, in fig. KLYP, quibus incidant duæ rectæ lineæ, EG, Q℞, ad eundem angulum ex eadem parte, siue secent figuras, siue non, ductis autem vtcumq; dictis tangentibus parallelis, BF, L&, quæ in punctis F, &, diuidant similiter ad eandem partem ipsas, EC, Q℞, & circuitus figurarum in punctis, B, I, S, D, L, T, X, P. reperiamus, DF, ad, P&, esse vt, EC, ad, Q℞, & ita esse, SF, ad, X&, IF, ad, T&, BF, ad L&, ita nempè, vt, quæ sunt ad eandem partem ipsarum, EG, Q℞, eodem ordine sumptæ, sint, vt ipsæ, EG, Q℞, sic etiam tangentes, AE, KQ, CG, Y℞, sint vt, FQG, ℞, & sic cæ-*



A Def. 10. *teræ consimiliter sumptæ, tunc voco figuras, ABCD, KLYP similes,*
B. Def. 10. *& ipsas, EG, Q℞, incidentes similes figurarum, ABCD, KLYP, & oppositarum tangentium, AE, CG, KQ, Y℞; ipsas, BI, SD, LT, XP, quæ clauduntur perimetris figurarum, & diuidunt productæ, si opus sit, ipsas, EG, Q℞. similiter ad eandem partem, voco, homologas earumdem figurarum, quarum dictæ oppositæ*
C. Def. 10 *tangentes dicuntur tangentes, siue regulæ.*

Cum verò figuræ, ABCD, KLYP, fuerint in eodem plano, vel in pla-

in planis æquidistantibus, ita constitutæ, vt ipsæ incidentes, EG, Q℞, sint vel superpositæ ad inuicem, vel parallelæ, & homologæ, BI, SD, LT, XP, ad eandem partem ipsarum, EG, Q℞, & partes homologæ incidentium (per dictas homologas, productas, si opus sit, similiter ad eandem partem diuisarum) fuerint pariter ad eandem partem constitutæ, tunc voco figuras, ABCD, KLYP, nedum similes, sed etiam similiter positas. D. Def. 10.

Sint nunc quotcumque figuræ planæ in eodem plano vtcumque dispositæ, ABCD, ORΩV, & aliæ tot numero in quouis plano, KLYP, Z9βΣ, quæ binæ sint similes, scilicet, ABCD, ipsi, KLYP, &, ORΩV, ipsi, Z9βΣ, quarum omnium homologæ C. Def. 10.
duabus quibusdam reperiantur æquidistantes, sint autem respectu ipsarum, quibus dictæ homologæ æquidistant, ductæ in figuris, ABCD, KLYP, oppositæ tangentes, AE, CG, KQ, Y B. Def. 10.
℞, & in figuris, ORΩV, Z9βΣ, oppositæ tangentes, OH, ΩM, ZΓ, βΛ, quæ tangentes erunt regulæ homologarum similium figurarum iam dictarum; Sint deinde incidentes duarum ex di- B. Def. 10.
ctis similibus figuris vtcumq; vt ipsarum, ABCD, KLYP, & oppositarum tangentium, AE, CG, ipsæ, EG, Q℞, quæ producantur vsque ad extremas tangentes, SM, βΛ, quibus incidant in punctis, M, Λ, reperiamus autem integras, EM, QΛ, similiter ad eandem partem secari tum à tangentibus, CG, Y℞, tum ab, OH, ZΓ, & insuper portiones, HM, ΓΛ, esse etiam incidentes oppositarum tangentium, OH, ΩM, ZΓ, βΛ, & similium figurarum, ORΩV, Z9βΣ, veluti ipsæ, EG, Q℞, sunt incidentes oppositarum tangentium, AE, CG, KQ, YR, & similium figurarum, ABCD, KLYP. Tunc igitur has figuras voco binas similes, & vnas, scilicet ipsas, ABCD, ORΩV, similiter, ac alias inter se dispositas, idest vt ipsæ, KLYP, Z9βΣ, & earum, ac extremarum tangentium, AE, ΩM, KQ, βΛ, ipsas, EM, QΛ, voco etiam incidentes.

A. XI.

Similes figuræ solidæ, vel similia solida, in vniuersum vocentur, in quorum singulis opposita plana tangentia ita duci possunt, & in eadem ita incidere ad eundem angulum ex eadem parte duo plana in iisdem terminata, vt si dein-

deinde inter eadem plana tangentia eisdem æquidistantia
D. Def. 2. vtcumque plana ducta fuerint, altitudines solidorum, re-
spectu dictorum tangentium sumptas, similiter ad eandem
A. Def. 10. partem diuidentia, reperiamus figuras ex his planis in di-
ctis solidis conceptas esse similes, vel si plures producan-
E. Def. 10. tur, tot numero in vno, quot in alio solido produci, quæ
sint binæ similes, & quæ sunt vnius solidi similiter inter se
disposite, ac quę sunt alterius, & omnium homologas dua-
bus quibusdam rectis lineis communiter, tamquam earum-
dem regulis, æquidistare. (sic .n. earum homologæ cum
quibusuis alijs duabus regulis angulos æquales cum præ-
dictis facientibus, vt infra Prop. 23. huius ostendetur, e-
tiam haberi poterunt) Vnde si regulæ homologarum acci-
piantur cum incidentibus planis concurrentes, & conce-
ptarum in solidis similium figurarum ductæ in singulis op-
positæ tangentes præfatis regulis Parallelę producantur, si
opus sit, quousq; prædictis incidentibus planis occurrant,
& binarum quarumcumque oppositarum tangentium pun-
cta occursuum iungantur rectis lineis, etiam has iungentes
reperiamus singulas esse incidentes suarum similium figu-
rarum, & oppositarum tangentium, ac omnes dictas inci-
dentes concipi in figuris similibus, quarum, & ipsæ inci-
dentes sint homologæ, & omnium regulæ communes se-
ctiones planorum incidentium, & oppositorum planorum
tangentium. His omnes, inquam, conditiones similia so-
lida in vniuersum habere suppono.

B B.

IPsæ autem figuræ planæ similes, quæ capiunt omnes di-
ctas incidentes, vocentur. Figuræ incidentes dictorum
similium solidorum, & oppositorum tangentium iam du-
ctorum.

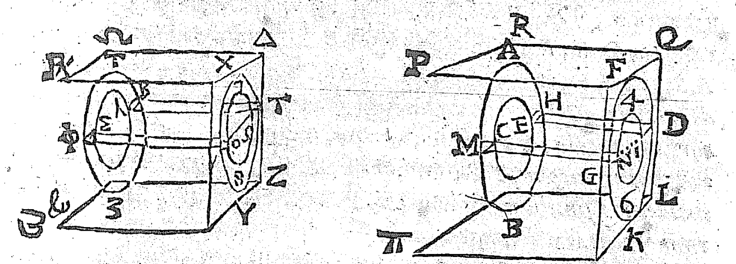
C C.

D. Def. 3. FIguræ verò ex planis dictis tangentibus Parallelis in
eisdem solidis conceptæ, quotcumque sint, altitudi-
nes eorundem respectu dictorum tangentium sumptas si-
militer ad eandem partem diuidentes, quæ similes esse re-
pe-

periuntur, siue binæ similes, & vnæ, ac aliæ similiter inter
se dispositæ, vocentur: Figuræ homologæ dictorum simi- A.E.Def. 10.
lium solidorum, sumptæ regula vna ipsarum, vel opposito-
rum tangentium, quæ homologarum figurarum plana tan-
gentia, si libeat, etiam vocentur.

APPENDIX POSTERIOR
Pro declaratione Definit. 11.

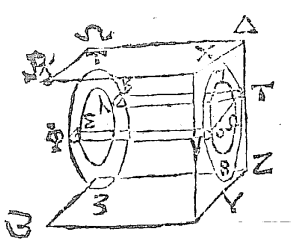
*SInt solida, Γβ3Φ, AHBM, quorum sint opposita tangen-
tia plana, Δ℞ Z&, solidi, Γβ3Φ, &, QP, LΠ, so-* B. Def. 2.
*lidi, AHBM, sint autem alia duo plana, quæ istis incidant ad
eundem angulum ex eadem parte, ΔΥ, QK, illa nempè quo-
rum, et dictorum tangentium sint communes sectiones, ΔX, Z*

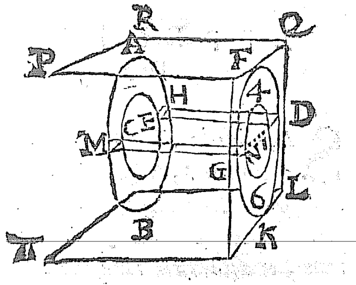


*Υ, QF, LK, secentur nunc dicta solida planis tangentibus pa-
rallelis, quæ diuidant eorum altitudines respectu dictorum tan-
gentium sumptas similiter ad eandem partem: Sint autem eo-* D. Def. 2.
rum in dictis solidis conceptæ figuræ planæ similes, si vna in v no A.E.Def. 10.
*quoq; solido figura producantur, vel si plures, binæ similes, et si-
militer inter se dispositæ, quæ fiunt in vno, ac quæ fiunt in alio so-
lido, ex. g. ipsæ, βΛ, ΣΦ, HE, CM, quæ sint binæ similes, idest,
βΛ, ipsi, HE, &, ΣΦ, ipsi, CM, &, βλ, ΣΦ, similiter inter
se dispositæ, ac ipsæ, HE, CM, quarum similium figurarum ho-
mologæ duabus quibuscumque regulis, vt ipsis, ℞Ω, PR, æqui-
distent; vel si hæ non sint cum planis, ΔΥ, QK, concurrentes,*

 altas,

aliis, Ω Δ, R Q, cum prædictis angulos æquales continentes, R Ω Δ, P R Q, pro regulis homologarum accipiemus, hoc .n. fieri posse demonstrabitur in Prop. 23. huius, quę erunt cum planis, Δ Υ, Q K, concurrentes. Si ergo ducantur prædictarum similium





figurarum, β λ, H E, Σ Φ, C M, oppositæ tangentes, parallelæ regulis, Ω Δ, R Q, ex. g. figuræ, β Λ, oppositæ tangentes, β T, Λ S, &, H E, ipsæ, H D, E I, &, Σ Φ, ipsæ, Σ O, Φ V, & tandem ipsius, C M, ipsę, C N, M G, quæ productæ si opus sit, occurrant planis, Δ Υ, Q K, in punctis, T, S; O V; D, I; N, G; iungantur autem, T S, O V, D I, N G, et ipsę reperiantur esse incidentes similium figurarum, β λ, H E, Σ Φ, C M, et dictarum oppositarum tangentium.

Consimiliter, sectis eisdem solidis alijs planis dictis planis tangentibus parallelis, altitudinesque dictas similiter ad eandem partem secantibus, semper conceptæ in solidis figuræ sint similes, vel binę similes, &c. & earumdem homologarum oppositę tangentes parallelę pręfatis regulis, Ω Δ, R Q, sint productę vsque ad plana, Δ Υ, Q K; occurrantque illis in punctis, quę si iungantur rectis lineis, ipsę iungentes sint dictarum similium figurarum, & ductarum oppositarum tangētium semper incidentes, quæ omnes iaceant in planis, Δ Υ, Q K, per quarum extrema transeant lineę, X V Υ T, F G K D, et interius lineæ, 4 N 6 1, 7 0 8 5, & contingat figuras, X V Υ T, F G K D, esse similes, earumque homologas dictas incidentes, & ipsarum regulas esse communes sectiones planorum, in quibus iacent, & oppositorum planorum

tan-

tangentium, idest ipsas, X Δ, Υ Z, F Q, K L. His igitur positis, voco solida, Γ β 3 Φ, A H B M, similia; figuras verò, F G K D, X V Υ T; dico figuras incidentes similium solidorum iam dictorum, et oppositorum tangentium planorum, R Δ, & Z; P Q, Π L; ipsas autem figuras, β λ, Σ Φ, H E, C M, et eas, quarum extensa plana similiter ad eandem partem diuidunt altitudines solidorum, Γ β 3 Φ, A H B M, respectu dictorum tangentium planorum sumptas, & sunt similes, vel binæ similes, & similiter inter se disposita, voco figuras homologas dictorum solidorum, sumptas, regulis earum duabus, vel dictis tangentibus planis.

A. Def. 11.
B. Def. 11.
C. Def. 11.

SCHOLIVM.

ADuertendum est autem pro similium figurarum nominatione, dum voco eas similes figuras siue planas, siue solidas, me intelligere in eis definitiones generales superius allatas; dum verò eas particulari nomine appello, intelligere definitiones particulares pro ipsarum similitudine ab alijs, vel à me allatas, vt cum dicam, similes coni sectionum portiones, intelligam particularem in eis definitionem, & cum dicam (similia parallelogramma) intelligam in eis particularem definitionem similium rectilinearum figurarum, & sic in cæteris, licet vtramq; definitionem tum particularem, tum generalem, de eisdem figuris verificari inferius ostendemus.

XII.

CVm fuerint quotcumque magnitudines eiusdem generis vtcumque dispositæ, prima ad vltimam dicitur habere rationem compositam ex rationibus primæ ad secundam, secundæ ad tertiam, tertiæ ad quartam, & sic deinceps vsq; ad vltimam.

XIII.

CVm vnum, & idem antecedens ad plura consequentia comparatum fuerit, singillatim ad vnumquodq; comparare idem ad eadem consequentia simul collecta, dicemus, colligere, vel, colligendo.

Pa-

X I V.

Parallelogrammum dicetur exposite cuicumque planæ figuræ circumscriptum, si eius singula latera tangant dictam figuram, quæ illi pariter dicetur inscripta.

X V.

Parallelepipedum dicetur exposito solido circumscriptum, si eius singula plana tangant dictum solidum, quod illi pariter dicetur inscriptum.

POSTVLATA

I.

Qvamlibet rectam lineam indefinitè ita posse moueri, vt semper vni cuidam fixæ sit parallela, siue in eodem, siue in pluribus planis, in tali motu existat.

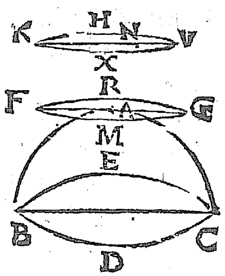
I I.

Qvodlibet planum indefinitè ita posse moueri, vt semper vni cuidam fixo sit æquidistans.

PROBLEMA I. PROPOS. I.

Cviuslibet propositæ figuræ planæ, vel solidæ, verticem inuenire, respectu datæ, pro figura plana rectæ lineæ; pro solida verò, respectu dati plani.

Sit figura plana quæcumque, A B C, & in ea ducta recta linea, B C, oportet respectu ipsius, B C, verticem figuræ, A B C, inuenire. A. Def. 1. Sumatur in plano figuræ, A B C, indefinitè producto, vtcumq; punctum, N, & per, N, ipsi, B C, ducatur parallela, K V, indefinitè hinc inde producta, vel igitur, K V, tangit figuram, B A C, & sic inuentum esset, quod quæritur, vel non; igitur erit, K V, vel intra, vel extra figuram, vbicumq; sit, moueatur, K V, Postul. 1. semper manens in eiusdem figuræ plano, & æquidistans ipsi, B C, recedendo ab eadem, B C, si intra figuram reperiebatur, vel accedendo, si erat extra, tandem .n. con-



tin-

tinget figuram, A B C, contingat in situ ipsius, F G, & in puncto, A, igitur, A, erit vertex figuræ, A B C, respectu ipsius, B C, à nobis inuentus, qui in huius Problematis priori parte inueniendus proponebatur. A. Def. 1.

Sit nunc figura solida, siue solidum, A D E, in quo respectu plani, B E C D, sit vertex inueniendus, sumpto igitur extra planum figuræ, vtcumque puncto, N, per ipsum agatur planum, K H V X, ipsi, B E C D, æquidistans, quod vel continget solidum, B A C, vel non, si autem non contingat, moueatur accedendo, Postul. 2. vel recedendo, à plano, B E C D, tandem igitur continget ipsum, tangat in, A, puncto, igitur punctum, A, erit vertex solidi, A D E, respectu plani, B E C D, qui inueniendus proponebatur. A. Def. 2.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, si recta, B C, tangat planam figuram, A B C, quod ductæ erunt oppositæ tangentes ipsius figuræ, A B C, B. Def. 1. *respectu datæ rectæ lineæ, quæ fuit vna ex eisdem tangentibus, nempè, B C; & ita si figura, B D C E, tangit solidum, A D E, ducta erunt* B. Def. 2. *opposita tangentia plana solidi, A D E, respectu plani, B E C D, in quibus puncta contactuum erunt oppositi vertices earumdem figurarum,* A. Def. 2. *hoc pacto inuenti: Si verò recta linea, B C, secaret figuram, A B C, vel planum, B E C D, secaret solidum, A D E, eodem pacto ex alia parte lineæ, B C, vel plani, B D C E, inueniemus verticem, vnde inuenti erunt propositæ figuræ planæ oppositi vertices, & ductæ oppositæ tangentes respectu datæ lineæ, B C; & in solido inuenti erunt oppositi vertices, & ducta opposita tangentia plana respectu dati plani, B D C E, quæ cum tangunt in figuris planis, figuræ contactuum* C. Def. 2. *vocantur etiam oppositæ bases, & earum singulæ bases, & bases lineares, si contactus fieret in lineis: hinc ergo discimus inuenire oppositos vertices figuræ planæ, vel solidæ cuiuscumque, & eorum opposita tangentia ducere respectu datæ in figura plana rectæ lineæ, & dati plani pariter in solida figura.* A.B. Def. 1. & 2.

PROBLEMA II. PROPOS. II.

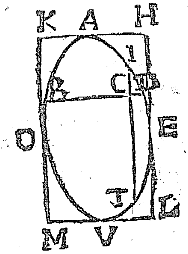
Cvilibet figuræ planæ parallelogrammum circumscribere, cuius latera duabus datis rectis lineis, in propositæ figuræ plano se secantibus, sint parallela.

Sit

Sit propoſita quæcumque figura plana, AOVE, & in ipſius plano duæ rectæ lineæ, B D, I T, vtcumq; ſe inuicem ſecantes

Def. 14. in puncto, C, oportet illi parallelogrammum circumſcribere, cuius latera rectis, S D, I T, ſint parallela. Ducantur ergo oppoſitæ tangentes figuræ, A O V E, reſpectu ipſius, I T,

Cor. ant. quæ ſint, K M, H L, & aliæ duæ reſpectu ipſius, B D, quæ ſint, K H, M L, quæ cum prædictis concurrent, nam ſunt parallelæ ipſis, B D, I T, quæ inuicem concurrunr, ſit ergo concurſus in punctis, K, M, L, H, igitur, K L, erit parallelogrammum, cuius ſingula latera tangent ambitum figuræ, vt in

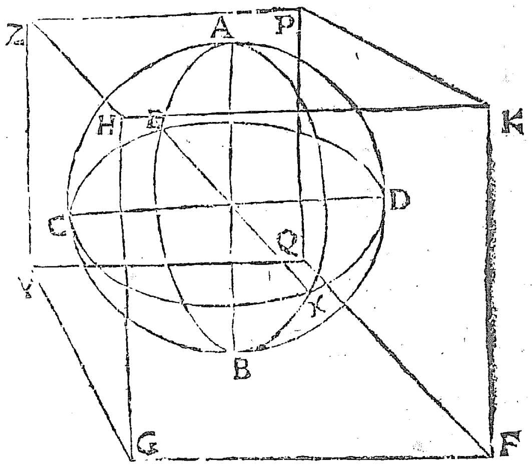


punctis, A, O, V, E, & ideò erit figuræ, A O V E, circumſcri-

Def. 14. ptum, habens latera duabus datis rectis lineis, B D, I T, in figuræ, A O V E, plano ſe inuicem ſecantibus, parallela; quod efficere, &c.

PROBLEMA III. PROPOS. III.

CVilibet ſolido parallelepipedum circumſcribere, cuius plana oppoſita tribus datis planis, ſe inuicem ſecantibus, ſint parallela.



Sit ſolidum, ACBD, quodcumq; in quo tria plana, A C B D, A B, C D, ſe inuicem ſecent, quælibet duo, oportet ſolido, A C

Def. 15. B D, parallelepipedum circũſcribere, cuius oppoſita plana prædictis planis ſint parallela. Ducãtur duo plana oppoſita

Coroll. 1. huius. tangentia dictum ſolidum reſpectu cuiuſuis planorum ſe ſecantium,

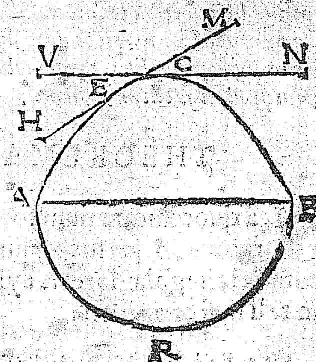
tium, A C B D, A B, C D, & producantur donec ſibi occurrant, occurrent autem, quia hæc planis ſe inuicem ſecantibus ſunt parallela, & ſit ab illis comprehenſum ſolidum, Z F, erit igitur, Z F, parallelepipedum, cum eius oppoſita plana ſint inuicem parallela, quæ tangunt ſolidum, A C B D, vt in punctis, A, C, B, D, E, X, & ideò erit ſolido, A C B D, circumſcriptum, habens plana oppoſita pro- Def. 15. poſitis planis ſe ſecantibus parallela; quod efficere opus erat.

S C H O L I V M.

Poteſt autem contingere in antecedentis Propoſ. figura ipſam eſſe parallelogrammum, & lineas rectas ſe ſecantes, quibus parallelogrammi circumſcriptibilis latera debent eſſe parallela, eſſe ipſa parallelogrammi latera, in quo caſu idem eſſet parallelogrammum circumſcriptum, & cui circumſcriberetur: Veluti hic etiam ſi ſolidum, A C B D, eſſet parallelepipedum, cuius oppoſitis planis, plana circumſcriptibilis deberent eſſe parallela, tunc enim idem eſſet parallelepipedum circumſcriptum, & cui circumſcriberetur: Contactus autem in antecedenti poteſt etiam eſſe in linea, & in hac tum in linea, tum in planis, licet contactus, qui fit in punctis tantum expoſitus fuerit.

THEOREMA I. PROPOS. IV.

DAta quacumq; figura plana, vel ſolida, & in plana data recta linea, in ſolida verò dato plano; quælibet linea, vel planum, quod indefinitè productum non tangat figuram dictam planam, vel ſolidam, in vertice ſumpto reſpectu dictæ lineæ, vel plani, vel totum extra, vel aliquid eius intra figuram cadit, nempè figuram ſecat, ſi linea lineæ, vel planum plano æquidiſtet.



Sit data figura plana, CARB, & in ea recta, AB, ſit vertex vnus reſpectu ipſius, A B, punctus, C, & ſit recta, H M, parallela ipſi, A B, quæ etiam indefinitè producta non tangat figuram, ARBC, in, C, vertice. Dico, H M, vel totam extra figuram cadere, vel eandem ſecare. Neutrum efficiat ſi poſſibile eſt, igitur, H M, tanget figuram, C A R B, & non in, C, igitur in alio puncto, vt in, E, igitur, E, erit vertex figuræ, C A R B, reſpectu ipſius, A B; eſt etiam, C, vertex eiuſdem reſpectu eiuſdem, A B, ergo ſi per, C, A. Def. 1. huius.

C du-

ducamus rectam, V N, parallelam ipsi, A B, transibit hæc per punctum, E, qui est etiam vertex respectu ipsius, A B, igitur secabit, H M, quod est absurdum, nam vtræque sunt parallelæ eidem, A B, & ideò inter se sunt parallelæ, vel, V N, extendetur super, H M, & sic, H M, transiret per, C, in ipsoq; tangeret figuram contra suppositum, quod etiam est absurdum, non igitur, H M, tanget figuram, C A R B, sed erit tota extra figuram, si nullibi concurrat cum ambitu figuræ, vel, transiens per aliquem punctum, eandem secabit, si is punctus non sit ex illis, qui sunt vertices ipsius figuræ ex hac parte, vel ex opposito respectu ipsius, A B; quod similiter in solidis ostendemus pro rectis lineis, A B, H M, V N, plana intelligentes, & ipsam, C A R B, esse figuram solidam supponentes, quæ ostendere opus erat.

Vide dicta lib. 7. Annot. Prop. 5.

Ex A. Defin. 1. huius.

COROLLARIVM I.

Hinc patet à quolibet puncto ambitus datæ figuræ planæ, vel solidæ ductam lineam, vel planum æquidistans illi, respectu cuius sumitur vertex (si sumptus punctus non sit vnus ex verticalibus dictis) secare figuram, cum, vt ostensum est, tangens esse non possit, & ideò semper inter duo opposita tangentia, respectu regulæ, penes quam sumitur vertex, assumpta linea cadet, licet indefinitè producatur.

COROLLARIVM II.

Et quia si recta linea, vel planum, secat duas parallelas, vel duo æquidistantia plana, secat etiam omnia intermedia illis æquidistantia; ideò si recta linea, vel planum, transeat per verticem, & basim, siue per oppositos vertices datæ figuræ planæ, vel solidæ, secabit etiam omnes in figura oppositis tangentibus æquidistantes intra figuram, vel easdem productas extra figuram.

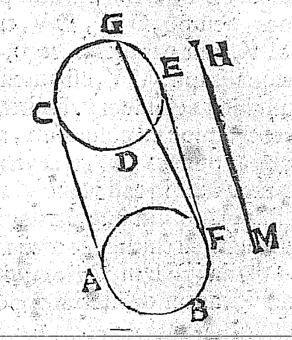
THEOREMA II. PROPOS. V.

Si à quocumque puncto circuitus cylindrici, per quam fit reuolutio versus cylindricum ducta fuerit recta linea parallela regulæ lateris cylindrici, hæc erit latus cylindrici in tali basi constituti.

D. fin. 3.

Sit cylindricus, C B, in basi, A F B, in cuius circuitu sumpto vtcumq; puncto, F, ab eo ducta sit versus cylindricum quædam parallela

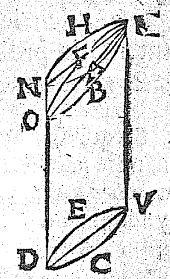
lela ipsi, H M, quæ sit regula lateris cylindrici. Dico eam esse latus huius cylindrici. Intelligatur per punctum, F, ductum latus cylindrici, quod sit, F E, vel igitur ducta ab, F, parallela ipsi, H M, cadit super, F E, & sic erit, & ipsa latus cylindrici, vel non, nempè si caderet, vt, F G, tunc quia, F E, est parallela ipsi, H M, & etiam, F G, est ipsi, H M, parallela sequitur, F E, ipsi, F G, esse parallelam, & sunt F E, F G, eductæ ab eodem puncto, F, in quo sunt concurrentes, quod est absurdum, igitur quæ ducitur à puncto, F, parallela ipsi, H M, cadet super, F E, latus cylindrici, igitur erit latus huius cylindrici, quod erat ostendendum.



THEOREMA III. PROPOS. VI.

Svperficies, quæ clauditur ambitu descripto ab extremo puncto lateris cylindrici, quod per circuitum eiusdem basis non properat, est superficies plana, & æquidistans basi, si ea sumatur, in qua iacent iungentes duo quæuis puncta descripti ambitus.

Sit quilibet cylindricus, A E, cuius basis, C D E V, latus, M V, cuius punctum extremum, M, quod non properat per ambitum basis, in reuolutione describat circuitum, M A N H. Dico figuram hoc circuitu comprehensam, in qua iacent iungentes duo quæuis puncta descripti ambitus esse superficiem planam, æquidistantem basi, CDEV, & ideò singula puncta huius circuitus reperiri in tali plano. Sumatur ergo in tali circuitu vtcumq; punctum, M, & per, M, ducatur basi, C E, æquidistans planum, M B O F. Dico omnia puncta descripti circuitus esse in hoc, plano: si enim non sint, aliquod erit extra, sit hoc punctum, N, & per, N, sit ductum latus cylindrici, quod sit, N D, secans circuitum figuræ planæ, B F, in, O, & circuitum basis in, D, deinde per, N D, M V, quæ sunt æquidistantes, cum sint cylindrici latera, extenda-



datur planum, quod basi in secet in recta, D V, figuram planam, M
16. Vndecimi Ele. B O F, in recta, O M, & iungantur, M N, puncta, quia ergo plana parallela, B F, C E, secantur plano quodam, communes eorum sectiones, nempè, O M, D V, erunt inuicem parallelæ, sed etiam, O D, M V, sunt parallelæ, ergo, O V, erit parallelogrammum, &, O D, æqualis ipsi, M V, est autem, M V, æqualis ipsi, N D, quia ambo sunt latera eiusdem cylindrici, ergo, D O, æqualis erit ipsi, D N, pars toti, quod est absurdum, non igitur aliquod punctum circuitus descripti à puncto, M, est extra planum æquidistans basi, C E, igitur omnia sunt in tali plano, iuncta igitur, N M, ipsa erit in eodem cum illis plano, in quo pariter iacebunt duo quæuis puncta iungentes eiusdem circuitus, & ideò figura tali ambitu contenta est superficies plana ipsi basi, C E, æquidistans, quod erat ostendendum: istę autem vocantur cylindrici oppositæ bases.

COROLLARIVM.

Qvoniam vero supposito ipsam, M B O F, esse superficiem planam basi æquidistantem, & ducto per latera, O D, M V, plano ostendimus, OV, esse parallelogrammum, ideò cum sciamus, M A N H, esse superficiem planam basi, CE, æquidistantem, ducto per latera vtcumque plano cylindricum secante, ostendemus eodem pacto, ducti plani secantis in cylindrico conceptam figuram esse parallelogrammum, cum scilicet planum ducitur tantum per duo latera, vel parallelogramma, cum Defin. 3. *per plura duobus, ipsum in eorum aliquo non tangens.*

THEOREMA IV. PROPOS. VII.

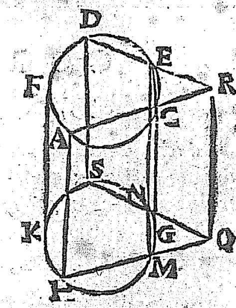
SI cylindricus secetur, vel tangatur à duobus planis per eiusdem latera ductis, quę non sint inter se parallela, sint autem illa producta donec sibi occurrant, communis eorum sectio erit eiusdem cylindrici lateribus parallela.

Sit quilibet cylindricus, F G, per cuius latera sint ducta duo plana non parallela, quæ ita sint producta, donec sibi occurrant, sint autem illa plana, A M, D N, quorum, & oppositarum basium cylyndrici, F G, communes sectiones, A C, H M, D E, S N, erunt igitur, A M, D N, parallelogramma, intelligantur oppositarum basium, F L, G K, indefinitè productarum plana secari à planis dictorum parallelogrammorum pariter indefinitè productis, in rectis, A R, D R, H O, S O, & eadem se inuicem secare in recta, R O.

Corol. antece.

Dico, R O, esse parallelam lateri cylindrici, F G. Iungantur, C E, M N, quoniam ergo, C E, M N, coniungunt extrema laterum cylindrici, C M, E N, quæ sunt æqualia, & parallela, erunt & ipsæ æquales, & parallelæ, sunt etiam parallelę ipsæ, C R, M O, ergo angulus, E C R, erit æqualis angulo, N M O, eodem pacto ostendemus angulum, C E R, esse æqualem angulo, M N O, vnde etiam, C R, M O, erunt æquales, & sunt parallelæ, ergo eas iungentes, quæ sunt, R O, C M, erunt ęquales, & parallelę, est autem, C M, latus cylindrici, F G, ergo, R O, communis sectio duorum planorum dictum cylindricum secantium, erit eiusdem lateribus parallela. Idem ostendemus, si sectio contingat fieri intra cylindricum, si autem fiat in superficie, patet non posse fieri, nisi in latere cylindrici, nam plana secantia ducuntur per latera, quodlibet autem latus est ceteris eiusdem cylindrici lateribus æquidistans, & ideò vbicumq; contingat sectionem fieri semper communis sectio planorum per latera cylindrici ductorum se inuicem secantium, est parallela lateribus cylindrici. Idem sequetur de tangentibus planis, quod erat ostendendum.

33. p. Primi Elem. p. 16. Vndec. Elem. 10. Vndecimi Ele. 26. Primi Elem.

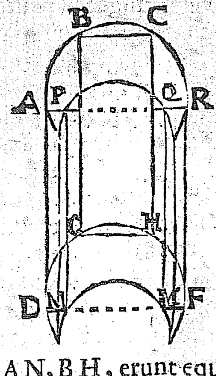


THEOREMA V. PROPOS. VIII.

SI quilibet cylindricus secetur planis parallelis per latera ductis, conceptæ in cylindrico figuræ erunt parallelogramma æquiangula.

Sit quilibet cylindricus, BF, planis sectus parallelis per latera ductis, sit autem vnius in cylindrico, AF, concepta figura parallelogrammum, B H, alterius autem parallelogramma, A N, Q F. Dico hæc esse ęquiangula, quod enim sint parallelogramma, patet, quia plana secantia ducuntur per latera, quod verò sint æquiangula patet etiam, nam in parallelogrammo, A N, latus, A D, æquidistat lateri, B O, &, A P, ipsi, BC, nam sunt communes sectiones plani, A B C R, & æquidistantium planorum, A N, B H, & ideò angulus, P A D, æquatur angulo, C B O, ergo parallelogramma, A N, B H, erunt æquiangu-

Ex Cor. 6. huius. 10. Vndecimi Ele.



angula, eodem pacto ostendemus parallelogramma, QF, BH, esse æquiangula, vnde concludetur etiam parallelogramma, AN, QF, esse inter se æquiangula, quod ostendere opus erat.

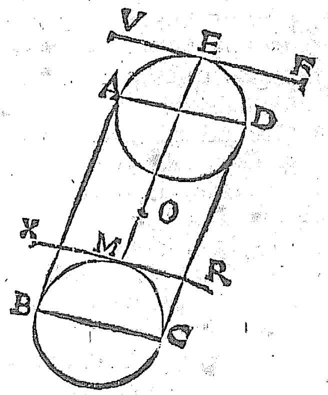
COROLLARIVM.

SI autem intelligamus oppositarum basium cylindrici, AF, ita producta plana, vt secentur à plano per latera, AD, PN, QM, RF, ducto in rectis, AR, DF, quarum portiones extra cylindricum manentes sint, PQ, NM, manifestum est etiam parallelogrammum, PM, quod extra cylindricum constituitur, & quod integratur ex parallelogrammis, AN, PM, QF, .i. AF, esse prædictis æquiangulum.

THEOREMA VI. PROPOS. IX.

SI planum æquidistans plano per latera cylindrici ducto tangat cylindricum, contactus fiet in recta linea, vel rectis lineis, quæ erunt latera eiusdem cylindrici: Vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus erunt parallelogramma, æquiangula per latera ducto.

Sit cylindricus, AC, per cuius latera ducatur planum in eo producens parallelogrammum, AC, sit autem ductum aliud planum huic æquidistans, quod tangat cylindricum, AC. Dico eiusdem contactum fieri in recta linea, vel rectis lineis, quę erunt latera cylindrici, AC, vel si tangat in plano, aut planis, plana contactus esse parallelogramma, æquiangula ipsi, AC. Primò igitur non tangat ipsum in plano, quia ergo tangit cylindricum, aliquid superficiei cylindrici commune est ipsi, & plano tangenti, sit is punctus, O, existens, & in plano tangente, & in superficie cylindracea, & per, O, sit ductum latus cylindrici, quod sit, EM. Dico totum, EM, reperiri in plano tangente cylindricum in, O, ęquidistante ipsi, AC. Ducatur per, M, ipsi, BC, parallela, XR, quia ergo, XR, ęquidistat ipsi, BC, & EM, ipsi, AB, vel,



vel, DC, planum per, EM, XR, ductum æquidistabit plano, AC, est autem planum, quod tangit cylindricum in, O, æquidistans plano, AC, & transit per idem punctum, O, per quod transit planum per, EM, XR, ductum, ergo illa duo plana fiunt vnum planum, iacet autem, EM, in plano per, EM, XR, ducto, ergo iacet etiam in plano ęquidistante ipsi, AC, & cylindricum, AC, tangente, igitur tangit cylindricum in recta, EM. Eodem pacto si in alio puncto extra, EM, in superficie cylindracea sumpto tangeret cylindricum, AC, ostenderemus tangere ipsum in latere, quod per tale punctum transiret; in quo casu tangeret cylindricum in lateribus vno pluribus, vt contingere potest. Tangat autem secundò ipsum in plano, igitur in eo plano sumpto vtcumque puncto, tanget cylindricum in latere transeunte per tale punctum, igitur planum contactus tale est, vt in eo omnes ductæ rectæ lineæ æquidistantes ipsi, EM, sint latera cylindrici, AC, & subinde eidem, EM, æqualia, vnde superficies, in qua iacent erit parallelogrammum, igitur planum contactus in hoc casu erit parallelogrammum, & erit æquiangulum parallelogrammo, AC, nam eius latera sunt parallela lateribus parallelogrammi, AC, & ideò continent angulos æquales contentis à lateribus parallelogrammi, AC, vnde talia parallelogramma sunt æquiangula, igitur contactus plani æquidistantis plano per latera cylindrici ducto, vel fit in latere, aut lateribus contacti cylindrici, vel in parallelogrammo, siue parallelogrammis, in eiusdem superficie iacentibus, & æquiangulis ei, quod fit à plano per latera ducto, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

HInc habetur communes sectiones plani tangentis, & cylindrici oppositarum basium productorum planorum, quæ sint, VF, XR, esse inter se parallelas, & tangere easdem bases; scilicet, VF, ipsam basim, EAD, &, XR, ipsam, MBC.

THEOREMA VII. PROPOS. X.

SI cylindricus quomodocumque secetur per latera, diuiditur in cylindricos à secantibus planis, si autem secetur planis omnibus eiusdem lateribus coincidentibus inter se parallelis; solidum comprehensum conceptis in cylindrico parallelis; solidum comprehensum conceptis in cylindrico figuris, & inclusa superficie cylindracea, erit cylindricus.

Sit

Sit cylindricus, A E, sectus à planis quomodocumque per latera. Dico per eadem diuidi in cylindricos; sint autem secantia plana, quę in cylindrico, A E, producant parallelogramma, A E, M E. Quia igitur, A E, est parallelogrammum, si in ipso ducantur rectæ lineæ ipsi, A D, H E, parallelæ, & in, A H, D E, terminatæ, erunt eisdem, A D, H E, æquales, & subinde erunt æquales, & parallelæ

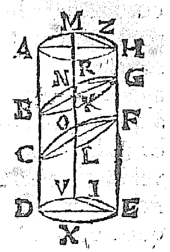
Ex def. 3.

regulæ lateris cylindrici, A E, vnde erit, A E, superficies cylindracea descripta latere, A D, siue latere cylindrici, A E, ergo solidum, A R X E, erit cylindricus. Eodem pacto ostendemus solida, A M H D V E, M Z H V I E, esse cylindricos, talibus igitur planis cylindricus, A E, semper diuiditur in cylindricos, quæ est prior pars huius Theorematis.

Secetur nunc duobus planis vtcumque inter se parallelis coincidentibus cum omnibus eiusdem lateribus, quæ in cylindrico, A E, producant figuras, B N G K, C O F L. Dico solidum compræhensum inter has figuras, & ijs inclusam superficiem cylindraceam, esse cylindricum. Sint adhuc plana per latera cylindrici, A E, vtcumque ducta, A E, M E, quæ secent figuras, B N G K, C O F L, in rectis, B G, C F, N G, O F, igitur eiusdem plani, & ipsarum, B N G K, C O F L, communes sectiones erunt parallelæ, quę sint, B G, C F, sicut etiam ipsæ, N G, O F, sunt autem parallelę etiam ipsæ, B C, N O, G F, ergo, B F, N F, erunt parallelogramma, & latera eorumdem, B C, G F, N O, inter se æqualia, & æquidistantia; si igitur eorum quoduis, vt, G F, statuatur pro regula lateris cylindrici, superficies inclusa duabus figuris, B N G K, C O F L, erit descripta vno laterum, B C, vel, N O, properante per circuitum figuræ, C O F L, semper ipsi, G F, æquidistante, donec redeat vnde discessit, igitur hæc erit superficies cylindracea, cuius oppositæ bases ipsæ figuræ, B N G K, C O F L, & solidum eisdem inclusum erit cylindri-

Def. 3.

cus, quod erat posterior pars huius Theorematis à nobis demonstranda.



THEOREMA VIII. PROPOS. XI.

Cuiusuis cylindrici oppositæ bases sunt similes, æquales, & similiter positæ.

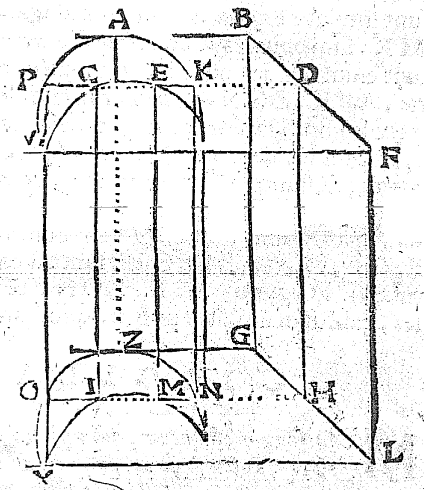
Sit cylindricus, P N, cuius oppositæ bases, A P K, O Z N. Dico eas esse similes, æquales, & similiter positas. Ducantur vtcumque duo

Coroll. 1. huius.

duo plana opposita tangentia cylindricum, P N, parallela cuidam per latera transeunti, quorum, & oppositarum basium productarum communes sectiones sint ex vna parte ipsæ, V F, X L, ex alia verò, A B, Z G, quæ tangent vel in latere, siue lateribus, vt in, V X, A Z,

9. Huius.

vel in planis, quæ erunt parallelogramma; sint autem dicta plana, & communes sectiones, indefinitè producta, & in qualibet dictarum communium sectionum, vt in, A B, sumpto vtcumque puncto, B, ducatur vsque ad oppositam tangentem vtcumque in earum plano recta, B F, illi incidens in, F, & per, B, ducatur in plano tangente ipsa, B G, parallela vni laterum cylindrici, P N, per ipsas autem, F B, B G, intelligatur extensum planum, quod secet aliud planum tangens in recta, F L, & planum per, Z G, X L, ductum in recta, G L, erunt igitur ipsę, B F, G L, parallelæ, vt & ipsæ, B G, F L, & erit, F G, parallelogrammum. Ducatur nunc intra dicta opposita tangentia plana eisdem æquidistans planum, quod erit ductum per latera, cylindricumque, P N, secabit, sit ductum per latera, P



Ex Lem. seq.

O, C I, E M, K N, & productum secet planum, F G, in recta, D H, & planum, quod transit per, A B, V F, in recta, P D, & quod transit per, Z G, X L, in recta, O H: erit ergo, D H, parallela ipsi, B G, &, B G, est parallela vni laterum cylindrici, ergo &, D H, erit parallela ipsi, K N, E M, C I, P O, & erunt ipsa, P I, C M, E N, K H, F H, D G, parallelogramma, & eorum latera opposita inter se ęqualia, nempè, F D, ipsi, L H, & D B, ipsi, H G, D K, ipsi, H N, D E, ipsi, H M, D C, ipsi, H I, &, D P, ipsi, H O, sunt igitur ipsæ, B F, G L, ductæ inter oppositas tangentes figurarum, A P K, Z O N, ad eundem angulum ex eadem parte, quia angulus, B F V, est æqualis angulo, G L X, nam, B F, est parallela ipsi, G L, &, F V, ipsi, L X, & sunt ipsæ, B F, G L, simili-

10. Vndecimi Ele.

ter ad eandem partem diuisæ in punctis, D, H, per rectas, P D, O H, parallelas ipsis oppositis tangentibus, quæ cum sint vtcumque du-

ductæ, reperitur tamen earumdem portiones, quæ iacent inter ipsas, G L, B F, ex eadem parte, eodem ordine sumptas, esse, vt ipsas, B F, G L, nam quia, D K, est æqualis ipsi, H N, &, B F, ipsi, G L, vt, B F, ad, G L, ita est, D K, ad, H N, & ita esse ostendemus, D E, ad, H M, D C, ad, H I, &, D P, ad, H O, nam istæ sunt æquales. Idem demonstrabitur in cæteris, quæ similiter ad eandem partem diuidunt ipsas, B F, G L, igitur figuræ, A P K, Z O N, sunt similes: Et quia earum homologæ, tum, P C, O I, tum, E K, M N, sunt ęquales, quod etiam de cæteris ostendetur eodem pacto, sunt enim semper parallelogrammorum opposita latera, ideò figuræ, A P K, Z O N, nedum erunt similes, sed etiam æquales, & regulæ homologarum erunt ipsæ oppositæ tangentes, & ipsę, B F, G L, earum incidentes. Quia verò figuræ, A P K, Z O N, sunt in planis æquidistantibus ita constitutæ, vt earum incidentes sint parallelæ, & homologæ figurarum, Z O N, A P K, sunt ad eandem partem incidentium positę, & item homologæ partes incidentium, B F, G L, vt ipsæ, B D, G H, sunt ad eandem partem pariter constitutæ, ideò figuræ, A P K, Z O N, nedum erunt similes, & æquales, sed etiam similiter positæ, quod ostendere opus erat.

Def. 10.

Aequales homologas argue re æquales similes figuras, & è contra, patebit infra in Cor. 25. huius, ab hac inde pendēter. D. Defin. 10.

COROLLARIVM.

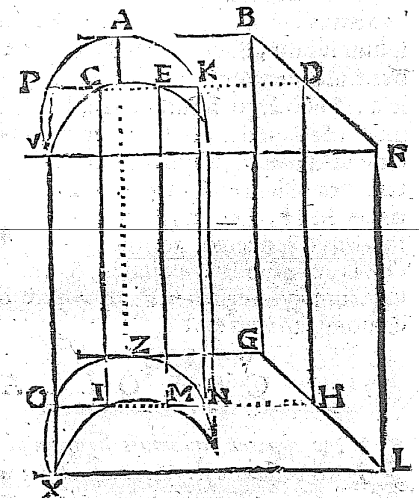
Manifestum est autem, quia plana opposita tangentia cylindrici, P N, ducta sunt vtcumque, & eorum, & oppositarum basium productarum communes sectiones sunt regulæ homologarum earumdem, quod si duxerimus duo alia opposita tangentia plana, habebimus etiam earumdem figurarum homologas, regulis adhuc communibus sectionibus horum tangentium planorum postremò ductorum, & earumdem basium productarum, quæ communes sectiones cum primò dictis angulos æquales continebunt, nam quæ existent ex. gr. in plano figuræ, A P K, erunt parallelæ existentibus in plano figuræ, Z O N, igitur in oppositis cylindricorum basibus homologas habebimus etiam cum quibusuis rectis lineis æquales angulos cum duabus quibusuis homologarum earumdem inuentis regulis continentibus, quæ igitur cum regulis homologarum oppositarum basium cylindrici angulos ad eandem partem continent æquales, sunt & ipsæ homologarum earumdem regulæ, necnon earumdem oppositarum basium, & oppositarum tangentium æquè ad prædictas inclinatarum, etiam incidentes licebit, vt supra, inuenire.

30. Vndecimi Ele.

LEM-

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

Desiderari tantum videtur huius euidentia, quod scilicet planum inter opposita tangentia plana eisdem æquidistanter ductum transeat per latera cylindrici, quod assumpta eiusdem figura nunc fiet manifestum; intelligatur ergo in ambitu vtriusuis oppositarum basium cylindrici, P N, sumptum punctum, vt, O, in ambitu figuræ, Z O N. Dico planum, quod transit per, O, æquidistans planis tangentibus, A G, V L, transire per latera cylindrici, P N. Ducatur ergo à puncto, O, latus cylindrici, P O, & ab eodem puncto, O, in basi, Z O N, recta, O N, parallela ipsi, X L, igitur planum, quod transit per, P O, O N, æquidistat plano, V L, nam, P O, ipsi, V X, lateri cylindrici, &, O N, ipsi, X L, ęquidistat, quod ergo ducitur per, O, eidem plano tangenti æquidistans transit per ipsas, P O, O N, si.n. non, erunt duo plana eidem plano, V L, æquidistantia, & ideò inter se æquidistantia, quibus communis erit punctus, O, igitur in eo concurrent, quod est absurdum, non ergo illa sunt duo plana, sed vnum tantum, illud nempè, quod ducitur per punctum, O, ipsi plano, V L, æquidistans, transitque per, P O, O N, necessariò: Si verò à punctis, I, M, N, erigantur latera cylindrici, C I, M E, N K, erunt cuncta in plano per, P O, O N, transeunte, ergo planum, quod ducitur per punctum, O, æquidistans plano, V L, cylindricum tangenti transit per latera, P O, C I, E M, K N, quod ostendendum erat.

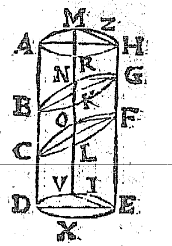


15. Vndecimi Ele.

THEOREMA IX. PROPOS. XII.

Si cylindricus planis secetur quomodocumque per latera ductis, eiusdem oppositę bases in figuras similes, ęquales, & similiter positas diuiduntur, tales autem erunt, quæ ad ad eandem partem ſecantium planorum exiſtent: Et ſi idem ſecetur planis parallelis quomodocumq; omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus, conceptæ in cylindrico figuræ erunt ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitæ.

Conſpiciatur figura Propoſit. 10. in qua iam propoſitas ſectiones habemus, plana enim, A E, M E, tranſeuntia per cylindrici latera ipſum ſecant, & plana, B N G, C O F, omnibus eiuſdem lateribus coincidunt, & ſunt parallela. Dico ergo figuras, M Z H, E I V, eſſe ſimiles, & æquales, & ſimiliter poſitas, quod patet, nam illæ ſunt cylindrici, M H Z I, oppoſitæ baſes; idem eodem modo probabitur de figuris, A M H, D V E, & de, A R H, D X E, & tandem oſtendemus pariter figuras, B N G K, C
11. Huius. O F L, eſſe ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitas, quia ſunt cylindrici, B F, oppoſitæ baſes, quod demonſtrandum erat.



COROLLARIVM.

Hinc apparet, quamuis figuram planam ex ſectione plani, oppoſitis baſibus cylindrici æquidiſtantis, in eo productam, eiſdem oppoſitis baſibus eſſe ſimilem, æqualem, & ſimiliter poſitam.

THEOREMA X. PROPOS. XIII.

Si quis cylindricus ſecetur plano per latera, deinde ſecetur planis oppoſitis eiuſdem baſibus æquidiſtantibus: Communes ſectiones plani per latera ducti, & planorum baſibus æquidiſtantium, erunt lineæ, vel latera homologa figurarum ſimilium, quæ ex ſectione æquidiſtantium planorum in cylindrico effecta in eodem producuntur.

Sit cylindricus, A D M, cuius oppoſitæ baſes, A B C, T D F, ſecetur autem plano vtcumque per latera ducto, quod in eo producat parallelogrammum, B F, & alio vtcumque plano oppoſitis baſibus æquidiſtante, quod in eo producat figuram, Y N X O, & in parallelogrammo, B F, rectam, N O. Dico rectas, D F, N O, B C, eſſe lineas, vel latera homologa figurarum, T D F, Y N O, A B C, ſimi-

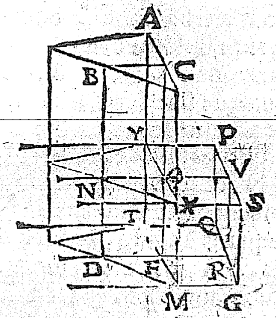
mi-

milium. Ducantur plana oppoſita tangentia cylindrici, A M, reſpectu plani, B F, in eo ducti, vnius quorum, & planorum figurarum, Y N O, T D F, productorum, communes ſectiones ſint, X S, M G, alterius autem, & eorundem planorum ſint rectæ, Y P, T Q, indefinitè ambæ productæ, ſumpto autem in, Y P, vtcumque puncto, P, ducatur per, P, ipſi, C F, æquidiſtans, P Q, & ab eodem in plano per, Y P, X S, tranſeunte vſque ad, X S, ducatur vtcumque ipſa, P S, per ipſas autem, Q P, P S, intelligatur extenſum planum, quod ſecet aliud tangens planum in, S G, & planum per, T Q, M G, ductum in, Q G, producantur autem ipſæ, N O, D F, verſus, P S, Q G, quibus occurrant in, V, R, & iungatur, V R, erunt igitur, V R, P Q, communes ſectiones æquidiſtantium planorum, Y Q, N R, & plani, P R, & ideò erunt parallelæ, vt & ipſæ, P V, Q R, & P R, erit parallelogrammum: Similiter, vt in Prop. 11. oſtendemus eſſe parallelogramma ipſa, V G, P G, N F, O R, N R, & angulum, P S X, æqualem eſſe angulo, Q G M, & tandem, P S, Q G, eſſe incidentes ſimilium figurarum, Y N O, T D F, & oppoſitarum tangentium, Y P, X S, T Q, M G, & tangentes eſſe homologarum earundem regulas, & quia eiſdem æquidiſtant ipſæ, N O, D F, & productæ ſimiliter, & ad eandem partem ipſas incidentes, P S, Q G, diuidunt; nam, P V, æquatur ipſi, Q R, & V S, ipſi, R G, ideò ipſæ, N O, D F, erunt lineæ homologæ figurarum, Y N O, T D F, ſimilium, quæ in plures homologas ſecari contingere poteſt, prout ſe habet ambitus ſuperficiei cylindraceæ huius cylindrici, A M, ſunt lineæ homologæ inquam, ſi ſint intra ambitum figurarum, quarum ſunt homologæ, ſunt verò latera homologa, ſi ſint in earundem ambitu, veluti contingeret ſi planum per latera ductum eſſet planum contactus vnius oppoſitorum tangentium, veluti ſi cylindricus fuiſſet, cuius oppoſitæ baſes ſunt, A B C, T D F, excluſis reſiduis figuris, quæ ab ipſis, B C, D F, abſcinduntur, tunc enim eodem modo facta fuiſſet demonſtratio, vt conſideranti facilè patebit; idem oſtendemus in recta, B C, & in quibuſuis alijs, quæ ſunt communes ſectiones planorum baſibus æquidiſtantium, & parallelogrammi, B F, probantes ſcilicet eaſdem eſſe lineas, vel latera homologa figurarum in cylindrico per baſibus æquidiſtantia plana productarum, quod oſtendere opus erat.

Coroll. 1. huius.

B. Def. 10. huius.

C. Def. 10. huius.

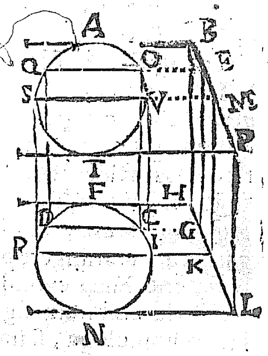


THEO-

THEOREMA XI. PROPOS. XIV.

SI duæ figuræ planæ non exiſtentes in eodem plano fuerint ſimiles, æquales, & ſimiliter poſitæ, illæ erunt cuiuſdam cylindrici oppoſitæ baſes.

Sint duæ ſimiles figuræ planæ, & æquales, AQTO, FDNC, non exiſtentes in eodem plano, & ſimiliter poſitæ. Dico eas eſſe cuiuſdam cylindrici oppoſitas baſes. Quoniam enim ſunt ſimiliter D. Def. 10 poſitæ erunt inter ſe æquidiſtantes, & earum incidentes pariter inter ſe æquidiſtantes, ducantur oppoſitæ tangentes figuræ, AQTO, Coroll. 1. huius. quæ ſint, TP, AB, & figuræ, FDNC, quæ ſint, FH, NL, quæque ſint regulæ homologarum earumdem ſimilium figurarum, & ſint incidentes earum, & ſimilium figurarum ipſę, BP, HL, quę D. Def. 10 erunt parallelæ, & quia ſunt incidentes ſimilium figurarum, AT, FN, & oppoſitarum tangentium iam ductarum, ideò ad eaſdem ex B. Def. 10. eadem parte efficient angulos æquales, igitur angulus, BPT, erit Excôuerſa 10. Vndec. Ele. æqualis angulo, HLN, & ideò etiam, PT, ęquidiſtabit ipſi, LN, &, BA, ipſi, FH, iungantur, BH, PL, quoniam ergo, AT, FN, ſunt ſimiles, & æquales, earum homologæ erunt pariter æquales, ſunt autem incidentes, BP, HL, vt ipſæ homologæ, vt colligitur in Coroll. 1. ſequentis Propoſit. 22. independenter ab hac Propoſitione, ergo, BP, HL, erunt æquales, & ſunt æquidiſtantes, ergo eas iungentes, BH, PL, erunt ęquales, & æquidiſtantes. Diuidantur ipſę in- 16. Sexti Elem. cidentes, BP, HL, ſimiliter ad eandem partem in punctis, E, M, G, K, & iungantur, EG, MK, erit ergo, MP, ęqualis ipſi, KL, &, EM, ipſi, GK, &, BE, ipſi, HG, nam quia, BP, HL, ſimiliter diuiduntur in his punctis, earum partes ſunt, vt ipſæ integræ, illæ verò ſunt æquales, & ideò etiam homologæ partes ſunt æquales, & 15. Vndecimi El. eas iungentes, PL, MK, EG, BH, erunt æquales, & æquidiſtantes, ducatur à puncto, K, verſus figuram, FN, ipſa, KR, æquidiſtans ipſi, NL, quia ergo, MK, æquidiſtat ipſi, PL, &, RK, ipſi, NL, planum per, MK, KR, tranſiens æquidiſtat tranſeunti per, PL, LN, ſecet hoc planum tranſiens per, MK, KR, planum, AT, productum, in recta, SM, & iungantur, SR, VI, erit ergo,

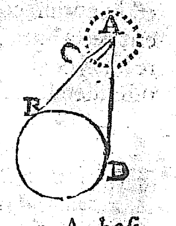


ergo, SM, æquidiſtans ipſi, TP, regulæ homologarum figurę, AT, veluti, RK, æquidiſtat ipſi, NL, regulæ homologarum figuræ, FN, & ſecant incidentes, BP, HL, ſimiliter ad eandem partem in punctis, M, K, ergo ipſæ, SV, RI, erunt homologę dictarum figurarum ſimilium, & ęqualium, quę ideò erunt æquales, ſicut etiam ipſæ, VM, IK, & ſunt ęquidiſtantes, ergo eas iungentes erunt ęquales, & ęquidiſtantes, ſcilicet, SR, VI, MK, eſt autem, MK, parallela, & ęqualis ipſi, PL, ergo, SR, VI, erunt ęquales, & parallelę ipſi, PL: Eodem pacto per, EG, extendentes planum ęquidiſtans plano, TL, quod ſecet figurarum, AT, FN, productarum plana in rectis, QE, DG, oſtendemus ipſas, QO, DC, eſſe homologas figurarum ſimilium, & ęqualium, AT, FN, & ideò eas eſſe ęquales, vt & ipſas, OE, CG, ergo ſi iungantur, QD, OC, iſtę erunt ęquales, & parallelę ipſi, EG, ideſt ipſi, PL; ſimiliter in cæteris planis procedemus, quæ inter plana, TL, AH, ipſis æquidiſtantia ducuntur, oſtendentes, quæ iungunt extrema homologarum earundem figurarum, AT, FN, eſſe æquales, & ęquidiſtantes ipſi, PL, ſi igitur, PL, regula ſtatuatur, erunt omnes dictæ iungentes in ſuperficie quadam, per quam ipſi, PL, properante quadam recta linea æquali ſemper ęquidiſtanter, eiuſdem extrema iugiter manent in ambitu figurarum, AT, FN, ergo hæc erit ſuperficies cylindrici, cuius oppoſitę baſes erunt ipſę, AT, FN, ſunt Def. 3. igitur, AT, FN, cylindrici cuiuſdam (nempè cuius latus eſt quoduis ipſorum, QD, SR, VI, OC,) oppoſitę baſes; quod erat nobis oſtendendum.

THEOREMA XII. PROPOS. XV.

PVnctus manens, cui in reuolutione innititur latus conici, eſt vnicus vertex conici reſpectu eiuſdem baſis.

Sit conicus, ABD, baſis, BD, punctus, cui innititur latus conici, ABD, A. Def. 4. in reuolutione, quę ab eo fit per circuitum baſis, BD, ſit, A. Dico, A, eſſe vnicum verticem conici, ABD, reſpectu baſis, BD. Intelligatur per punctum, A, ductum planum ęquidiſtans baſi, dico hoc planum tantummodo in hoc puncto tangere conicum, ſi enim poſſibile eſt eundem tangat, ſeu ſecet in duobus punctis, vt in, C, A, iuncta ergo, AC, illa erit in ſuperficie conicalari, & cum deſcendat à puncto, A, per ipſum tranſiet aliquando latus conici, vt, AB, igitur, AB, erit in plano ducto per, A, baſi, BD,



B D, ęquidistante, & quia latus, A B, indefinitè productum occurrit basi, etiam dictum basi ęquidistans planum occurret indefinitè productum ipsi basi, quod est absurdum, non igitur planum ductum per, A, basi, B D, ęquidistans conicum tangit vel secat in alio, quam in puncto, A, ergo, A, erit illius vnicus vertex respectu basis, B D, quod erat ostendendum.

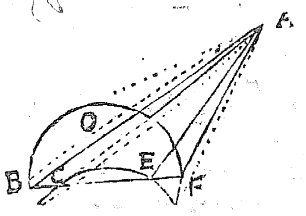
SCHOLIVM.

CVm autem dicemus verticem alicuius conici, intelligemus semper ipsum respectu basis assumptum, ideſt punctum, cui in reuolutione innititur latus cylindrici, nisi aliud explicetur.

THEOREMA XIII. PROPOS. XVI.

SI conicus secetur vtcumque per verticem ducto plano, concepta in ipso figura, vel figuræ, erit triangulus, vel trianguli.

Secetur quilibet conicus, A B F, plano vtcumque per verticem ducto, quod in eo producat figuram, siue figuras, A B C, A E F. Dico eas esse triangulos. Sit communis sectio illius, & basis producti plani, tota, B F, cuius, C E, portio maneat extra basim, est igitur, B F, recta linea, dico etiam esse rectas ipsas, A B, A C, A E, A F, si enim non est, A B, recta, ducatur in plano figurę, ABC, recta, A O B, igitur, A O B, quę



iungit punctum, B, & verticem coni est latus conici, A B F, ergo est in superficie coniculari, & est etiam in plano figurę, ABC, ergo est in eorum communi sectione, ideſt cadit super, A B, igitur, A B, erit recta linea, eodem modo ostendemus ipsas, A C, A E, A F, esse rectas, & ideò erit, A B C, triangulus, vt etiam, A E F, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

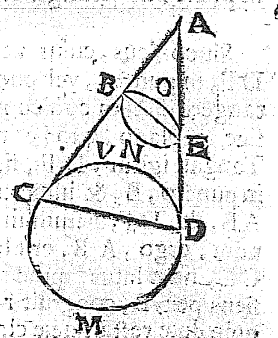
EOdem modo nobis innotescit figuras, quæ extra conicum fiunt esse triangulos, ideſt, A C E, esse triangulum, & qui ex ipsis integratur, scilicet, A B F, pariter esse triangulum.

THEO-

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII.

SI conicus secetur vtcumque planis per verticem, diuiditur ab eisdem in conicos: Et si secetur vtcumque planis coincidentibus omnibus eiusdem lateribus, solida ab ijsdem abscissa versus verticem erunt pariter conici, & eorum bases ipsæ figuræ abscindentes.

Sit quilibet conicus, A M V, sectus plano vtcumque per verticem ducto, quod in eo producat triangulum, A C D. Dico ab hoc plano secante in conicos, A C V D, A C M D, fuisse diuisum. Si n. intelligamus latus trianguli, A C D, quod sit, A C, vel, A D, innixum puncto, A, indefinitè productum ferri per rectam, C D, ipsa describet superficiem trianguli, A C D; ad modum superficiei conicularis, est autem reliqua, quę insistit ambitui, C V D, sic descripta, ergo tota superficies, A C D V, est conicularis descripta latere, AC, vel, AD, AD. est properante per circuitum figuræ planæ, C V D, ergo erit, A C V D, conicus, cuius basis ipsa figura, C V D, & vertex, A. Eodem modo ostendemus, A C M D, esse conicum, cuius basis, C M D, vertex, A. Secetur nunc plano vtcumque omnibus conici, A M V, lateribus coincidente, quod in eo producat figuram, B N E O. Dico, A N O, esse conicum, cuius basis figura, B N E O, vertex, A, nam dum latus conici, A M V, properat per circuitum basis, C M D V, vt describat eius conicularem superficiem, properat etiam per circuitum figurę, B N E O, & describit supra ipsam superficiem conicularem, igitur superficies ab eadem figura, B E, abscissa versus, A, est conicularis, & solidum comprehensum ab ipsa, & figura plana, B N E O, erit conicus, & eiusdem basis ipsa figura, B N E O, vertex autem, A, quod ostendere opus erat.



COROLLARIVM.

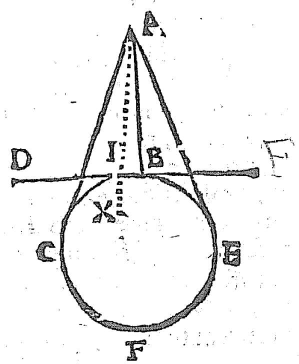
HInc habetur, si planum transeat per verticem conici, & quamlibet rectam lineam intra basim conici existentem, qui quidem secetur alio plano coincidente cum omnibus eiusdem conici lateribus, com-

communem sectionem horum duorum planorum fore intrà figuram in conico productam à plano omnibus eiusdem lateribus coincidente, vt patet in conico, ACD qui secatur plano, ACD, & alio, B N EO, quorum communis sectio sit, BE. Dico n. si, CD, sit intra figuram, C MDV, etiam, BE, fore intra figuram, B N EO, nam, ACVD, est conicus, & quia latera non vniuntur, nisi in puncto, A, ideo, BOE, est aliqua figura, vt etiam, B N E, & ideò, BE, cadit intra figuram, B N EO.

THEOREMA XV. PROPOS. XVIII.

SI per verticem conici, & rectam tangentem eius basim extendatur planum, hoc tanget ipsum conicum in vna, vel pluribus rectis lineis, quę erunt latera conici, vel in plano transeunte per eiusdem latera, quod erit triangulum, siue in pluribus triangulis.

Sit conicus, cuius vertex, A, basis, B C E, quam tangat recta, D F, in puncto, vel punctis, siue in linea. Dico planum, A D F, tangere dictum conicum in recta linea, siue in pluribus rectis lineis, siue in plano, quod erit triangulum per eiusdem latera transiens. Tangat igitur, D F, figuram, B C E, in puncto, B, & iungatur, A B, perq; A B, &, D F, dictum sit extensum planum, ergo, A B, erit latus conici, A C E, nam latus, quod reuoluitur transiens per, B, congruit rectę, A B, alioquin duæ rectæ lineæ clauderent superficiem, est ergo, A B, in superficie coniculari, est etiam in plano per, A, &, D F, transeunte, ergo, A B, est communis tum superficiei coniculari, tum plano per, A, &, D F, ducto, nullus autem punctus rectę, A B, est intra superficiem cylindraceam, ergo planum per, A B, D F, ductum tangit conicum in recta, A B: Eodem pacto ostendemus idem tangere conicum in quibusuis alijs lateribus, quæ ducuntur à punctis contactus rectæ lineæ, D F, qui si sint plures, fit etiam contactus in omnibus lineis, si vero contactus rectæ, D F, fiat in recta linea tunc contactus plani per, A B, D F, fit in singulis rectis lineis, quæ à recta talis contactus ad



verticem, A, duci possunt, iacent autem omnes illæ in plano trianguli, cuius basis est linea contactus vertex respectu eius, punctus, A, igitur, contactus plani per, A B, D F, ducti fit vel in vna, vel pluribus rectis lineis, vel in plano, quod est triangulum, siue plura triangula, non secabit autem alicubi tale planum ipsum conicum, tunc enim aliquis punctus talis plani per, A B, D F, transeuntis esset intra superficiem conicularem, sit is punctus, I, iuncta igitur, A I, & producta versus basim incidet intra basim, vt facilè ostendi potest, & quia est, A X, in plano per, A B, D F, ducto, & punctus, X, est etiam in plano basis, erit in communi sectione, idest in linea, D F, igitur aliquis punctus rectæ, D F, erit intra basim, igitur illam secabit, quod est absurdum, ergo falsum est planum per, A, D F, ductum secare alicubi ipsum conicum, igitur illum tanget in his, quæ dicta sunt, quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

EX hoc habetur, si conicus secetur plano basi æquidistante, communem sectionem huius, & plani per verticem, & tangentem basim ducti, tangere figuram à plano æquidistante basi in conico productam, si enim eam secaret, etiam tangens planum secaret conicum, quod est absurdum.

THEOREMA XVI. PROPOS. XIX.

SI conicus plano secetur basi æquidistante, concepta in eo figura erit similis basi, & eidem similiter posita.

Sit conicus, cuius vertex, A, basis, T D F, secetur autem plano basi æquidistante, quod in eo producat figura, V B O. Dico hanc esse similem basi, & eidem similiter positam. Ducantur ipsius basis duæ vtcumque oppositæ tangentes, quæ sint, T H, S P, indefinitè productæ, deinde per verticem, & quamlibet dictarum tangentium extendatur planum, erunt ergo hęc plana tangentia conicum, A D F, secent autem figuræ, V B O, productum planum in rectis, V K, X N, quæ erunt ipsius figuræ, V B O, oppositæ tangentes, sumatur deinde in altera ipsarum, T H, S P, vt in, T H, vtcumq; punctum, vt, H, à quo versus reliquam tangentem eiusdem figurę, T D F, in eiusdem plano ducatur vtcumque, H P, in, S P, terminata, deinde intelligatur extensum planum per, A, &, H P, transiens ita, vt secet plana conicum tangentia in rectis, A H, A P, &

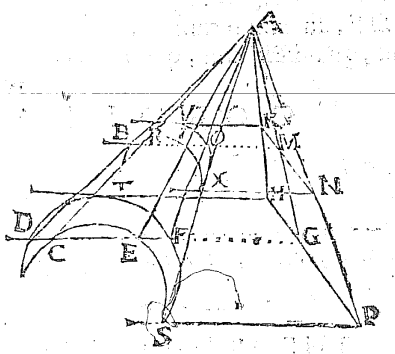
Coroll. 1. huius.

Penãtes.

Corol. anteced.

 pla-

planum per, V K, X N, ductum in recta, K N, rurſus diuidatur, H
P, vtcumq; in puncto, G, à quo ducatur ipſi, S P, parallela, G D,
ſecans baſis ambitum in punctis, F, E, C, D, deinde extendatur
planum per, A, verticem, & rectam, D G, quod per conici latera
16. Huius. tranſibit, & producet triangula ſiue intus, ſiue extra conicum, quæ
ſint, A D C, A C E, A E F, A F G, ſecabitque figuram, V B O, ſe-
cet eius productum planum in recta, B M, quæ ambitum eiuſdem,
V B O, diuidat in punctis, B, R, I, O, habebimus etiam triangula,
A B R, A R I, A I O, A O M, quorum latera erunt portiones late-
rum inferiorum triangulorum, per planum autem, A D G, ſiue per
rectam, A G, ſit ſecta, K N, in puncto, M. Quia ergo plana, quę
per rectas, V K, X N, &
per, T H, S P, tranſeunt
ſunt parallela, & ſecan-
10. Vndecimi El. tur à plano, A P H, com-
munes eorum ſectiones e-
runt parallelę. ſ. K N, ipſi,
H P, igitur triangulus, A
M N, æquiangulus erit
triangulo, A G P, & ideò
4. Sexti Elem. circa æquales angulos e-
runt latera proportiona-
lia, ergo vt, P G, ad, G
A, ſic erit, N M, ad, M
A, eodem modo oſtende-



mus, vt, A G, ad, G H, ita eſſe, A M, ad, M K, ergo ex æquali
P G, ad, G H, erit vt, N M, ad, M K, ſunt igitur, P H, N K, ſi-
militer ad eandem partem diuiſæ in punctis, M, G: Eodem modo
oſtendemus triangulum, A M O, eſſe ęquiangulum ipſi, A G F, &,
A M I, ipſi, A G E, &, A M R, ipſi, A G C, & tandem, A M B,
ipſi, A G D, igitur, vt, G A, ad, A M, ſic erit, permutando, F G,
ad, O M, vt verò, G A, ad, A M, ſic permutando eſt, P G, ad,
N M, ideſt, P H, ad, N K, ergo, F G, ad, O M, eſt vt, P H, ad,
N K, ſimiliter oſtendemus, E G, ad, I M, &, C G, ad, R M, &
tandem, D G, ad, B M, eſſe vt, P H, ad, N K, & quia, K N, eſt
10. Vndecimi El. parallela ipſi, H P, &, N X, ipſi, P S, ideò angulus, K N X, eſt
æqualis angulo, H P S; habemus igitur duas figuras planas, V B O,
T D F, quarum ductæ ſunt oppoſitæ tangentes, V K, X N, vnius,
&, T H, S P, alterius, inuenimus autem rectas, K N, H P, inter
eaſdem poſitas, cum eis ad eandem partem angulos æquales conti-
nentes, ita ſe habere, vt ductis duabus vtcumque ipſis tangentibus
parallelis, quæ diuidant ipſas ſimiliter ad eandem partem, repertum
ſit

ſit eas, quæ inter taliter incidentes, & perimetrum figurarum con-
tinentur, eodem ordine ſumptas, eſſe vt ipſas, H P, K N, inciden-
tes, ſunt igitur figuræ planę, B V O, D T F, inter ſe ſimiles, & ho- A. Def. 10.
mologarum earundem regulæ ipſæ tangentes, dictæ figuræ ſunt in
planis æquidiſtantibus, quarum incidentes ſibi inuicem ęquidiſtant,
& homologæ earundem figurarum ſunt ad eandem partem inciden-
tium, & ipſarum incidentium partes homologæ pariter ad eandem
partem conſtitutæ, igitur figuræ, V B O, T D F, nedum erunt ſimi-
les, ſed etiam ſimiliter poſitæ, quod oſtendendum erat.

COROLLARIVM I.

ET quia oſtenſum eſt ipſas tangentes, S P, X N, eſſe homologarum earundem ſimilium figurarum regulas, & ductæ ſunt vtcumque, patet ſi duxerimus alias duas eiuſdem baſis oppoſitas tangentes, quæ cum primò ductis angulos efficient æquales, & per ipſas, & verticem, A, extenderimus duo plana (quorum & plani figuræ, B V O, producti communes ſectiones erunt aliæ duæ figuræ, B V O, oppoſitæ tangentes) quod eodem modò oſtendemus has ſecundas tangentes eſſe homologarum earundem ſimilium figurarum regulas, & intra ipſas contineri earundem quoq; incidentes; facient autem ſecunda tangentes cum primis angulos æquales, prima .n. ex. gr. tangens figuræ, B V O, quæ eſt, X N, eſt parallela ipſi, S P, primæ tangenti figuræ, D T F, & ſecunda tangens figuræ, B V O, eſt pariter parallela ſecundæ tangenti figuræ, D T F, nam tum primæ, tum ſecundæ tangentes ſunt communes ſectiones æquidiſtantium planorum, ipſarum nempè figurarum, B V O, D T F, productorum planorum, & ideò ſunt parallelæ, & angulos continent æquales, vnde in figuris, quæ à planis baſi conici parallelis producuntur, ſi habeamus 10. Vndecimi El. *homologas cum duabus quibuſdam regulis, eaſdem etiam habebimus cum duabus quibuſuis alijs angulos æquales cum prædictis ad eandem partem continentibus.*

COROLLARIVM II.

PAtet inſuper ex hac, & 11. ac 12. huius ſimilium planarum figurarum, quæ ex ſectione planorum baſi cylindrici, vel conici æquidiſtantium in illis producuntur, vel ſunt oppoſitæ baſes cylindrici, aut fruſti conici, poſſibile eſſe inuenire incidentes, quæ ſint & ductarum vtcumq; oppoſitarum earundem tangentium incidentes, & quia punctum, H, ſumptum eſt vtcumque, & ab ipſo ducta quælibet incidens, H P, patet, quod, ducta vtcumque in dictis figuris incidente earum tangenti-

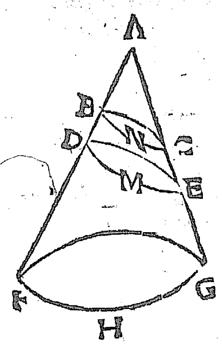
bus,

bus, quæ ſunt regulæ homologarum earundem, poſſunt reperiri duæ incidentes earundem, quarum altera ſit iam ducta; veluti, acta, H P, vcumque inuentæ ſunt duæ incidentes, K N, H P, quarum altera fuit, H P. Et quia homologarum in eaſdem incidentes productarum, & ad eas terminatarum, portiones, eodem ordine ſumptæ, ſunt proportionales, ſunt enim, vt ipſæ incidentes, ideò per homologarum productarum, talia extrema ſemper tranſeunt aliquæ incidentes.

THEOREMA XVII. PROPOS. XX.

SI conicus ſecetur quomodocumq; planis parallelis, cum omnibus eiuſdem lateribus coincidentibus, conceptæ in ipſo figuræ erunt inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ.

Sit conicus, cuius baſis, F H G, vertex, A, ſecetur autem vtcumque planis parallelis, quæ cum omnibus eiuſdem lateribus coincidant, & ſint conceptæ in ipſo figuræ, D M E, B N C. Dico has eſſe ſimiles, & ſimiliter poſitas: Nam quia planum figuræ, D M E, coincidit 17. Huius. omnibus lateribus conici, A F H G, ideò eſt etiam conicus ipſe, A D M E, ſecatur Ex antec. autem plano eius baſi, D M E, æquidiſtante, eo ſcilicet, quod producit figuram, B N C, ergo figura, B N C, erit ſimilis baſi, D M E, & eidem ſimiliter poſita, quod erat demonſtrandum.



THEOREMA XVIII. PROPOS. XXI.

SI quilibet conicus ſecetur plano per verticem, ſiue ab eodem tangatur in plano, nempe in triangulo, vel triangulis, ſecetur autem alijs planis vtcumq; baſi parallelis, communes ſectiones, quæ ab eodem plano ſecante fiunt in dictis planis baſi parallelis, erunt homologę lineę, vel latera figurarum, quæ ab eiſdem æquidiſtantibus planis in eodem conico producuntur.

Vi-

Videatur figura Propoſ. 16. huius, in qua conicus, A T D F, intelligatur ſectus plano vtcumque per verticem, A, ducto efficiente triangulum, ſiue triangulos, A D C, A E F, intra, extra autem triangulum, A C E, & qui ex illis integratur, A D F, ſecetur autem alio plano baſi parallelo, quod in conico producat figuram, V B O, & ſint earum, & plani per verticem communes ſectiones, B R, D C, I O, E F. Dico eaſdem eſſe lineas homologas earundem figurarum, V B O, T D F. Intelligantur in baſi ductæ oppoſitæ tangentes, T H, S P, per quas, & verticem, A, extendantur plana, quæ pariter tangent conicum, A T D F, ſint autem eorum, & plani figurę, V B O, producti communes ſectiones, V K, X N, quas, vt ibi, oſtendemus eſſe oppoſitas tangentes ipſius, V B O, reſpectu, B O, ſumptas, accipiatur deinde in, T H, vtcumq; punctum, H, à quo vſq; ad aliam oppoſitam tangentem, S P, ducatur vtcumque, H P, & per ipſam, & punctum, A, extendatur planum, quod ſecet tangentia plana in rectis, A H, A P, & planum parallelarum, V K, X N, in recta, K N, erunt ergo ipſæ, K N, H P, parallelæ, extendatur planum trianguli, A D F, ita vt ſecet triangulum, A P H, in recta, A G, & planum figuræ, T D F, productum, ſi opus ſit, in recta, D G. Eodem modo igitur, quo vti ſumus in Propoſ. 19. quia, K N, H P, ſunt parallelæ, oſtendemus ipſas, K N, H P, eſſe ab ipſis, B M, D G, (quę ſunt communes ſectiones trianguli, A D F, & ęquidiſtantium planorum, V B O, T D F, & ideò ſunt parallelæ) ſimiliter diuiſas, & ad eandem partem in punctis, M, G, vnde, vt ibi oſtendemus figuras, V B O, T D F, eſſe ſimiles, & earum, & tangentium oppoſitarum, X N, V K; S P, T H, incidentes eſſe ipſas, K N, H P, & tangentes eſſe regulas homologarum earundem, quarum duæ ſunt ipſæ, B R I O, D C E F, coniunctæ; ſiue ipſæ, B R, D C; I O, E F. Eodem modo, ſi propoſitus conicus fuiſſet, cuius vertex, A, baſis altera figurarum à baſi, T D F, per rectam, D F, abſciſſarum, vt ipſa, D T F, oſtenſum eſſet ipſas, B R, D C; I O, E F, communes ſectiones plani conicum tangentis in triangulis, A D C, A E F, & planorum æquidiſtantium, B V O, D T F, eſſe earundem homologas, erunt autem in hoc caſu latera homologa, velut cum ſunt intra figuras ſunt lineæ homologæ earumdem, quod erat oſtendendum.

Coroll. 1. huius.

18. Huius.

Sed hoc etiam per modũ Corollar. ex Prop. 19. deduci potuiſſet.

COROLLARIVM.

H*Inc habetur, ſi propoſitum fuiſſet fruſtum conici, B T F, quod eius omnia latera producta coincidiſſent in vno puncto, A, vnde oſtenſum pariter fuiſſet communes ſectiones plani per eius latera tranſeun-*

ſeuntis, vt ipſius, BDFO, quod ſemper eſt trapezium, & ipſarum, VBO, TDF, ſiue eiſdem æquidiſtantium inter eaſdem ductarum, eſſe earundem lineas, vel latera homologa, vnde patet communes ſectiones plani per latera fruſti conici ducti, & eiuſdem baſium oppoſitarum, ſiue eiſdem æquidiſtantium inter eas productarum figurarum; eſſe earundem lineas, vel latera homologa; lineas, inquam, cum ſunt intra figuras, nec ſumuntur in plano tangente: latera, cum ſunt in earum circuitu, cum nempè ſunt in eodem plano tangente, in eo præciſè, quod eſt planum contactus fruſti conici (contactus ſcilicet eius plani, quod per verticem ducitur) quod ſemper erit trapezium, vel trapezia, vt patere poteſt in trapezijs, BDCR, IEFO, quæ eſſent planum contactus fruſti conici, ſi idem fruſtum tangeretur à plano trianguli, ADF.

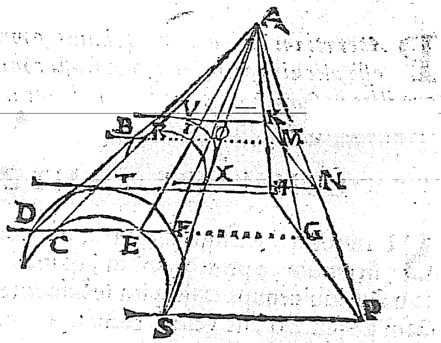
THEOREMA XIX. PROPOS. XXII.

SI duæ figuræ planæ ſimiles, non exiſtentes in eodem plano, fuerint inæquales, & ſimiliter poſitæ; erunt cuiuſdam fruſti conici oppoſitæ baſes.

Vtamur adhuc figura Propoſ. 19. & ſint duæ figuræ planæ quæcumque ſimiles, inæquales, & ſimiliter poſitę, non tamen exiſtentes in eodem plano, ipſæ, VBO, TDF. Dico, quod erunt ambæ cuiuſdam fruſti conici oppoſitę baſes. Quoniam ergo figurę, V D. Def. 10. huius. BO, TDF, ſunt ſimiliter poſitæ, & non in eodem plano, erunt in planis ęquidiſtantibus, & quia ſunt ſimiles ſint earum incidentes, & oppoſitarum tangentium, quæ ſunt earundem homologarum regulæ, ipſæ, KN, HP; KN, ipſius, VBO, &, HP, ipſius, TDF, & prædictæ tangentes figuræ, VBO, ſint ipſæ, VK, XN, & figuræ, TDF, ipſæ, TH, SP, erunt ergo ipſæ, KN, HP, æquidiſtantes, & quia ad tangentes, quæ ſunt regulæ homologarum, illę Conuerſa 10. Vndecimi El. efficiunt ad eandem partem angulos æquales, erit angulus, KNX, æqualis angulo, HPS, & quia, KN, eſt parallela ipſi, HP, erit etiam, XN, parallela ipſi, SP. Eodem pacto oſtendemus, VK, eſſe parallelam ipſi, TH; ducantur in figuris, VBO, TDF, duæ earum homologæ regulis dictis tangentibus, quæ ſint ipſæ, BR, IO, DC, EF, ſint autem totæ, BO, DF, productæ, ſi opus ſit, vt ſecent ipſas, KN, HP, quas diuident ſimiliter ad eandem partem, vt in punctis, M, G, & quia figuræ propoſitæ ſunt inæquales, ſit maior ipſa, TDF, igitur etiam maior erit, DC, ipſa, BR, vel, EF, ipſa, IO, ſi n. eſſent eiſdem æquales, etiam reliquæ homologæ his parallelæ eſſent ęquales, cum omnes ſint proportionales (ſunt.n.

vt

vt incidentes) vnde etiam figuræ eſſent æquales, & ſi minores, etiam ipſa figura, TDF, eſſet minor figura, BVO, contra ſuppoſitum, eſt igitur, DC, maior ipſa, BR, eſt autem, vt, DC, ad, BR, ita, PH, ad, NK, nam vt, DG, ad, BM, ita eſt, PH, ad, NK, & A. Defin. 10. etiam ita, CG, ad, RM, ergo reliqua, DC, ad reliquam, BR, erit vt, PH, ad, NK, ſic etiam eſſe oſtendemus, EF, ad, IO, vt, PH, ad, NK, & quia, DC, eſt maior ipſa, BR, vel, EF, ipſa, IO, ideò, HP, erit maior, KN, ſi igitur iunxerimus puncta, PN, HK, ipſæ, PN, HK, ſi producantur ad partes ipſius, NK, concurrent, vt in, A. Dico, A, eſſe verticem conici, cuius eſt baſis ipſa, TDF, & ex plano ipſi, TDF, ęquidiſtanter ducto eſt in ipſo concepta figura, VBO. Quia ergo, NK, eſt parallela 4. Sexti Elem. ipſi, PH, erunt triangula, ANK, APH, ęquiangula, & circa æquales angulos latera proportionalia, igitur, HP, ad, PA, erit vt, KN, ad, NA, &, permutando, HP, ad, NK, erit vt, PA, ad, AN, vt autem, PH,



ad, NK, ita eſt, PG, ad, NM, nam ipſa, HP, KN, ſimiliter ſunt diuiſæ in punctis, G, M, ergo, PA, ad, AN, erit vt, PG, ad, NM, & ſunt parallelæ ipſæ, PG, NM, ergo puncta, G, M, A, erunt in vna recta linea, ſit illa, AG, igitur, vt, PG, ad, NM, Ex Lemmate ſeq. vel, PH, ad, NK, ita erit, GA, ad, AM, eſt autem, PH, ad, NK, vt, FG, ad, OM, & vt, EG, ad, IM, & tandem, vt, DG, ad, BM, ergo, vt, GA, ad, AM, ita erit, FG, ad, OM; EG, ad, IM; CG, ad, RM; &, DG, ad, BM, ergo, cum ſint parallelæ, erunt tum puncta, AOF, tum, AIE, ARC, tum etiam, ABD, in vna recta linea, extendantur ergo dictæ rectæ lineæ, quę Ex Lemmate ſeq. erunt, AF, AE, AD, AC. Eodem modo, ſi per duas quaslibet homologas figurarum, VBO, TDF, planum extendamus, fiet in cæteris demonſtratio; igitur ſi ſumantur in ambitu figurę, TDF, quęcumq; puncta, quę iungantur cum puncto, A, ſemper iungentes tranſibunt per circuitum figuræ, VBO, ergo figurę, TDF, &, VBO, erunt fruſti conici oppoſitę baſes, quod à conico, ATDF, Defin. 4. abſcinditur per figuram, VBO, quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM I.

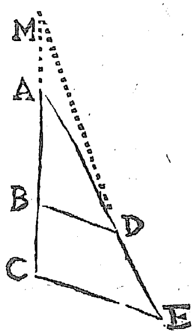
Quoniam ostendimus, tum, D C, B R, tum etiam, E F, I O, esse vt ipsas incidentes, P H, N K, habetur similium figurarum homologas pariter esse, vt incidentes earundem, & oppositarum tangentium, quæ sunt earundem regulæ, quod in diffinitione assumitur contingere, tantum ijs, quæ inter circuitum figurarum, & ipsas incidentes, eodem ordine sumptæ, continentur.

COROLLARIVM II.

Patet etiam ex hac, & 14. huius, omnes similes figuras planas posse esse alicuius cylindrici, vel frusti conici, oppositas bases; vnde quæ pro illis in Coroll. 2. 19. huius colliguntur, pro omnibus similibus figuris planis etiam colligi possunt.

LEMMA PRO ANTECED. PROP.

SI in recta linea signentur tria puncta, primum, medium, & postremum, à primo autem, & medio ducantur ad eandem partem duę inuicem parallelę ita se habentes, vt educta à primo ad eductam à secundo, sit veluti recta inter primum, & postremum punctum posita, ad eam, quę inter medium, & idem postremum sita est; Extrema puncta parallelarum, quę non sunt in proposita linea, & illius postremum, erunt in recta linea.



Sit proposita recta, AC, in qua signatis vtcumque tribus punctis, C, primo, B, medio, &, A, postremo, à punctis, C, B, educantur ad eandem partem duę inuicem parallelę, quę sint, C E, B D, ita se habentes, vt, C E, ad, B D, sit, vt, C A, ad, A B. Dico puncta, A, D, E, esse in recta linea. si enim (iuncta, E D,) ipsa, E D, producta non transit per, A, transibit supra, vel infra, A, secans, C A, (nam, B D, est minor ipsa, C E, vt est, A B, minor, A C,) transeat, vt per, M, quia igitur, E D M, est recta erit, M C E, triangulus, in quo lateri, C E, ducitur parallela, B D, ergo trianguli, E C M, D B M, erunt æquianguli, & circa æquales angulos latera proportionalia, ergo, permutando, C E, ad, B D, erit vt, C M, ad, M B, est autem vt, C E, ad, B D, ita, C A, ad, A B, ergo vt, C M, ad, M B, ita erit, C A, ad, A B, diuidendo, C B, ad, B M, erit vt, C B, ad, B A, ergo, M B, erit æqualis ipsi, B A, totum parti, quod est absurdum, non igitur, E D, producta transit supra, A, eodem modo ostendemus non transire infra, A, ergo transibit per, A, ergo tria puncta, A, D, E, erunt in recta linea, A E, quod erat ostendendum.

4. Sexti Elem.

THEOREMA XX. PROPOS. XXIII.

SI duarum quarumlibet similium figurarum habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, habebimus etiam homologas earundem cum duabus quibusuis alijs, cum prædictis angulos æquales ad eandem partem facientibus.

Patet hęc propositio, nam quæcunq; figuræ planę similes, si sint æquales, & similiter positæ, possunt esse cuiusdam cylindrici oppositæ bases, si sint inæquales, oppositæ bases frusti conici, in his autem contingit, si habeamus homologas cum duabus quibusdam regulis, nos easdem habere cum alijs duabus quibuscumque cum prædictis angulos æquales ad eandem partem constituentibus, ergo hoc in quibuscumque planis similibus figuris verificatur, quod est propositum.

14. Huius. 22. Huius Corol. 9. & 11. huius.

COROLLARIVM.

Et quia incidentes ad homologarum similium figurarum regulas angulos ad eandem partem efficiunt æquales, ideò & ipsæ incidentes erunt homologarum earundem similium figurarum regulæ, & vice versa in quibusdam regulis homologarum poterunt sumi earum incidentes.

B. Def. 10.

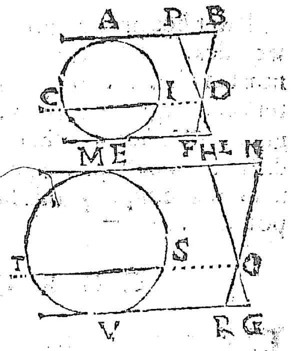
THEOREMA XXI. PROPOS. XXIV.

SI in duarum similium figurarum oppositas tangentes, quę earundem homologarum sint regulæ, incidant duæ rectæ lineæ ad eundem angulum ex eadem parte easdem secantes, ductis verò quibusdam duabus, prædictis tangentibus parallelis, in dictis figuris, quæ secantes diuidant similiter ad eandem partem, vel assumptis ipsis oppositis tangentibus, reperiamus harum portiones inter incidentes, & cir-

 cui-

cuitum figurarum eodem ordine sumptas, ita se habere, ve-
lut illæ, quæ dictis tangentibus inciderunt, istæ, quæ illis
inciderunt, erunt tum similium propositarum figurarum, tum
ductarum tangentium, incidentes.

Sint due quecumq; similes plane figure, ACEI, MTVS, qua-
rum sint ductæ oppositæ tangentes homologarum earundem regu-
læ, AB, EF, figuræ, AE, &, MN, VR, figure, MV, incidant
autem eisdem ad eundem angulum ex eadem parte duæ, BF, NR,
& ductæ sint quædam duæ ipsis tangentibus parallelæ, CD, TO,
secantes ipsas, BF, NR, (& consequenter incidentes, vt facilè
patet) similiter ad eandem partem, reperiamus, CD, ad, TO, &
pariter, ID, ad, SO, esse vt, BF, ad, NR. Dico ipsas, BF, N
R, esse incidentes similium figurarum, AE, MV, & ductarum op-
positarum tangentium, VR, MN;



C. 10. defi- nitionis. EF, AB. Ex dictis igitur ipse, CI, T
S, erunt homologe earundem similium
Ex Cor. 2. 19. & 22. huius. figurarum, AE, MV, & quia, CD,
ad, TO, est vt, BF, ad, NR, &, B
F, ad, NR, vt, ID, ad, SO, erit, C
D, ad, TO, vt, ID, ad, SO, igitur
puncta, D, O, reperientur in duabus
dictarum similium figurarum, & op-
positarum tangentium, incidentibus,
sint illæ ipsæ, HG, PL, que cum ip-
sis, TO, CD, æquales angulos ad
eandem partem continebunt. Dico ta-
men etiam ipsas, NR, BF, esse ea-
rundem figurarum, & tangentium, in-
cidentes: Sint puncta contactus tangentium, FE, RV, proxima ip-
B. Defin. 20. sis, NR, BF, ipsa, V, E. Dico, EF, ad, VR, esse vt, FB, ad,
RN, nam, EL, ad, VG, est vt, LP, ad, GH, quia verò angu-
lus, CDP, æquatur angulo, TOH, &, CDB, ipsi, TON, re-
liquus, PDB, equabitur reliquo, HON, & sic etiam, FDL, ipsi,
4. Sexti Elem. ROG, est etiam angulus, PLE, equalis angulo, HGV, ideò re-
liquus in triangulo, DFL, idest angulus, DFL, erit equalis angu-
lo, ORG, & sic triangula, FDL, ORG, erunt æquiangula, vt
etiam probabimus triangula, DPB, OHN, esse equiangula, sicut
sunt equiangula inter se triangula, FDL, PDB, &, ROG, HO
N, vnde vt, LD, ad, DF, sic erit, PD, ad, DB, permutando,
LD, ad, DP, erit vt, FD, ad, DB, componendo, LP, ad, PD,
erit vt, FB, ad, BD; permutando, LP, ad, FB, erit vt, PD, ad,
DB,

DB, idest vt, HO, ad, ON, at; vt supra, ostendemus, HO, ad,
ON, esse vt, HG, ad, NR, ergo, PL, ad, BF, erit vt, HG,
ad, NR, erat autem, EL, ad VG, vt, PL, ad, HG, ergo, EL,
ad, VG, erit vt, BF, ad, NR, quia verò, BF, ad, NR, est vt,
DF, ad, OR, (nam, BF, NR, sunt similiter diuisæ in punctis,
D, O,) idest vt, FL, ad, RG, ergo, EL, ad, VG, erit vt, FL,
ad, RG, ergo reliqua, EF, ad, VR, erit vt tota, EL, ad, VG,
idest vt, BF, ad, NR. Idem ostendemus de quibuslibet ductis ip-
sis, EF, VG, parallelis, que diuidant, BF, NR, similiter ad ean-
dem partem, nempè eas, quæ inter ipsas, BF, NR, & circuitum
figurarum, AE, MV, eodem ordine sumptæ continentur, esse vt
ipsas, BF, NR, ergo, BF, NR, sunt incidentes similium figura-
rum, MV, AE, & ductarum tangentium, quod ostendere opus erat. B. Def. 10.

COROLLARIVM.

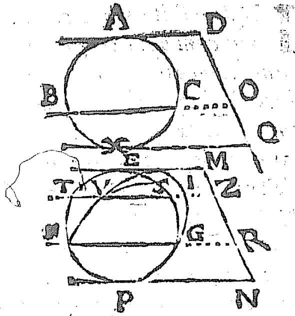
*IN notescit ex hoc consequenter duarum similium figurarum, & ea-
rundem oppositarum tangentium, quæ sunt regulæ homologarum,
tum incidentes similiter diuidi ab homologis earundem figurarum, pro-
ductis, si opus sit, tum quascumque alias, quæ cum homologis angulos
contineant æquales, vt exempli gratia ipsæ, NR, BF. Et vlterius ip-
sas homologas esse tum vt quasuis incidentes, tum vt eisdem parallelas;
idest ex. gr. CI, ad, TS, nedum erit vt, PL, ad, HG, siue vt, BF, ad,
NR, sed etiam vt, BF, ad quamcumque aliam parallelam ipsi, NR,
ductam inter parallelas, MN, VR, nam illa erit æqualis ipsi, NR.
Patet igitur duarum similium figurarum homologas nedum esse vt ea-
rum, & oppositarum earundem tangentium, quæ sunt regulæ homolo-
garum, incidentes, sed etiam vt quasuis alias inter easdem tangentes
ductas ipsis incidentibus æquidistantes, siue ad homologas similium figu-
rarum æqualiter inclinatas.*

THEOREMA XXII. PROPOS. XXV.

SI quæcunque similes figuræ planæ à rectis lineis descri-
bantur, quæ sint earundem homologæ, & inter se æqua-
les; superponantur autem ad inuicem ipsæ figuræ, ita vt ea-
sdem describentes rectæ lineæ sibi congruant, figuræq; sint
similiter positæ, illæ quoque erunt ad inuicem congruentes.

Sint similes figuræ planæ, ABXC, EFPG, quæcunq; descri-
ptæ ab earundem homologis, & æqualibus rectis lineis, BC, FG,
quæ

D. Defin. 10. quæ ita inuicem superponantur, vt, B C, F G, sibi congruant, &
ipsæ sint similiter positæ. Dico etiam ipsas figuras ad inuicem fore
congruentes. Sint oppositæ tangentes ductæ pro figura, A B X C,
ipsæ, A D, X Q, regula, B C, & pro figura, E F P G, regula, F
Coroll. 1. huius. G, ipsæ, E M, P N, quarum figurarum, ac oppositarum tangen-
tium sint quoque incidentes ipsę, D Q, M N, productis verò, B C,
B. Def. 10. F G, versus, D Q, M N, illis incidant in punctis, O, R, & super-
ponatur figura, A B X C, figuræ, E F P G, ita vt, B C, congruat
ipsi, F G, & sint similiter positę: Erunt ergo ipsæ incidentes, D Q,
D. Defin. 10. M N, ad eandem partem figurarum iam superpositarum, & inuicem
parallelæ, vel congruentes, sed in nostro casu erunt congruentes,
cum enim vt, B C, ad, F G, ita sit, D Q, ad, M N, ipsæ verò, B
A. Def. 10. C, F G, sint ęquales, etiam, D Q, M N, ęquales erunt, sicut etiam,
C O, G R, (quæ sunt inter se vt, D Q, M N,) ergo cum punctus,
B, positus sit in, F, erit, O, in, R, &, D Q, extensa super, M N,
& cum etiam, D O, M R, sint ęquales
punctus, D, erit in, M, sic autem osten-
demus quoque punctum, Q cadere in,
N, & consequenter, X Q, cadere super,
P N, &, A D, super, E M, si ergo figu-
ra, A B X C, cadens super, E F P G, non
congruit illi, esto quod ceciderit, si pos-
sibile est vt, F V I G, ita vt ambitus ex-
tra ambitum cadat, sumpto autem quo-
cunque puncto, I, qui sit in ambitu fi-
guræ, V F P G I, sed cadens non in am-
bitu figuræ, E F P G, per ipsum duca-
tur, T Z, parallela, E M, secans, M N,



in, Z, ambitum figuræ, V P I, in, V, I, & ambitum figuræ, E F
P G, in, T, S, erunt autem homologę, V I, T S, & inter se ęqua-
C. Defin. 10. les cum sint, vt incidentes, D Q, M N, quæ sunt ęquales, necnon
A. Defin. 10. æquales reliquæ vsq; ad incidentes, nempè, S Z, I Z, quod est ab-
surdum, punctus enim, I, non est in S, non ergo cadet ambitus fi-
guræ, A B X C, superpositę ipsi, E F P G, vt dictum est, extra am-
bitum eiusdem figurę, E F P G, igitur cadet super illius ambitum, &
ipsę figurę erunt sibi inuicem congruentes, quod ostendendum erat.

COROLLARIVM.

*Ex hoc insuper colligitur figuras quascumq; planas similes ab æquali-
bus rectis lineis, tanquam ab homologis, descriptas inter se æqua-
les esse, cum ita ad inuicem superponi possint, vt sibi congruant, velut
in*

*in Prop. demonstratum est. Et vice versa si figuræ sint similes, & æqua-
les, etiam homologas æquales esse, si enim inæquales essent, etiam ipsæ
figuræ inæquales essent, quod est absurdum. Vlterius autem patet, si
sint inuicem superpositæ, ita vt similiter sint constitutæ, ac duæ quæuis
homologæ inuicem fuerint congruentes, etiam ipsas figuras fore con-
gruentes, alioquin sequerentur absurda superius demonstrata, cum quę-
uis aliæ homologæ necessariò quoque sint æquales, quæ enim congruerunt
sunt æquales, & subinde etiam incidentes, & quæuis aliæ homologæ in-
ter se sunt æquales.*

THEOREMA XXIII. PROPOS. XXVI.

SI duobus parallelis quibuscumque planis inciderint duo
plana se se intersecantia, primum nempè, & secundum;
fuerint autem alia duo parallela quæcumque plana, quibus
pariter incidant duo alia plana se se diuidentia, primum si-
militer, & secundum: Eorum autem cum parallelis planis
communes sectiones angulos ęquales comprehenderint, nec-
non primorum, ac secundorum planorum mutuæ sectiones
ad communes sectiones primorum planorum cum planis pa-
rallelis effectas angulos æquales constituerint, ipsa verò pri-
ma plana ad plana parallela æquè fuerint ad eandem partem
inclinata: Eędem communes sectiones ad communes sectio-
nes secundorum planorum cum planis parallelis effectas an-
gulos pariter constituent æquales, necnon secunda plana e-
runt ad eadem plana parallela æqualiter ad eandem partem
inclinata.

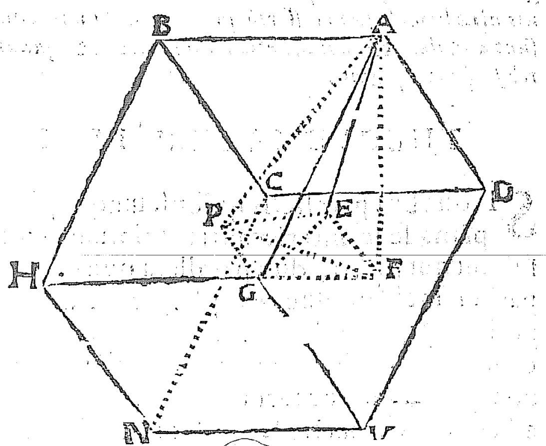
Sint duo parallela quæcunque plana, B D, H V, quibus incidat
duo plana, H A, primum, A V, secundum se se secantia in recta,
A G. Sint nunc alia duo plana quęcunq; parallela, L Q, & Λ, qui-
bus pariter incidant alia duo plana, L Y, primum, &, K Λ, secun-
dum, se se pariter secantia in recta, K Y, communes verò sectiones,
B A, A D; L K, K Q, incidentium planorum cum planis paralle-
lis contineant angulos æquales, sit nempè, B A D, angulus æqua-
lis angulo, L K Q, (erit.n.&, H G V, ęqualis ipsi, & Y Λ,) simili- 10. Vndecimi El.
ter ipsæ, A G, K Y, cum ipsis, G H, Y &, angulos constituant æ-
quales, & prima plana, B G, L Y, ad plana parallela, B D, H V;
L Q, & Λ, sint æquè ad eandem partem inclinata. Dico angulos,
A G V, K Y V, ęquales esse, necnon secunda plana, A V, K Λ, ad
ea-

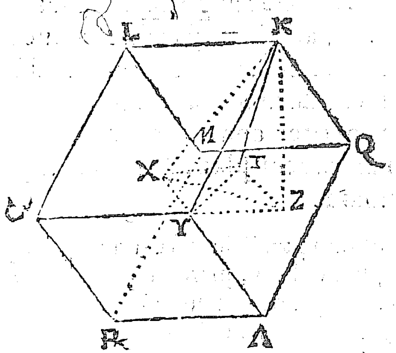
Defin. 3. Vndec. El. 13. Vndecimi El.

eadem parallela plana esse æqualiter ad eandem partem inclinata; Si igitur, A G, K Y, essent dictis planis parallelis perpendiculares, manifestum est, quod anguli, A G V, K Y Λ, essent æquales; idest recti, & plana, A V, K Λ, eisdem planis parallelis erecta; sed non sint perpendiculares, & à punctis, A, K, demittantur ipsę, A E, K T, quæ eisdem sint perpēdiculares, incidant autem subiectis planis in punctis, E, T; deinde à puncto, A, ad, H G, V G, productas, ducantur perpendiculares, A F, quidem ipsi, H G, &, A P, ipsi, VG, incidentes in punctis, V, P, nisi fortè, AG, esset alteri earũ perpendicularis, vt contingere potest, & iungantur, E P, E G, EF; similiter in alia figura cadant à puncto, K, perpendiculariter super ipsas, & Y, Λ Y, productas, si opus sit, ipsæ, K Z, K X, & iungantur similiter, T X, T Y, &, T Z. Quoniam ergo anguli, A F G, K Z Y, sunt recti, ideò quadratum, A G, erit æquales duobus quadratis, A F, F G, sicut quadratum, K Y, æquale duobus, K Z, Z Y, est autem etiam quadratum, A F, ęquale duobus quadratis, A E, E F, quia angulus, A E F, rectus est, & quadratum, K Z, pariter æquale quadratis, K T, T Z, ergo quadratum, A G, idest duo qua-

Vide dicta lib. 7. annot. Prop. 3.

47. Primi Elem.





quadrata, A E, E G, (quia etiam, A E G, rectus est) æquabuntur tribus quadratis, A E, E F, F G, vnde, ablato communi quadrato, A E, quadratum, G E, ęquabitur duobus quadratis, G F, F E; pari ratione autem probabimus quadratum, Y T, æquari quadratis, Y Z, Z T, vnde anguli, G F E, Y Z T, recti erunt; & eodem modo probabimus esse rectos, E P G, T X Y, ergo anguli, A F E, K Z T, erunt anguli inclinationis primorum planorum, B G, L Y, cum subiectis planis, H V, & Λ, & ideò inter se æquales: Similiter anguli, A P E, K X T, erunt inclinationes secundorum planorum, A V, K Λ, cum eisdem subiectis planis. Quia ergo anguli, A F E, K Z T, sunt æquales, &, A E F, K T Z, recti, erunt triangula, A F E, K Z T, inter se similia, vt etiam triangula, A F G, K Z Y, inter se, nam anguli, A G F, K Y Z, sunt quoque æquales, &, A F G, K Z Y, recti; erit ergo, vt, E F, ad, F A, sic, T Z, ad, Z K, & vt, A F, ad, F G, sic, K Z, ad, Z Y, ergo ex æquali, vt, E F, ad, F G, ita erit, T Z, ad, Z Y, & sunt circa rectos, nempè æquales angulos, G F E, Y Z T, ergo triangula, G F E, Y Z T, pariter similia erunt, anguli igitur, E G F, T Y Z, adæquabuntur, totus autem, P G F, toti, X Y Z, æquatur, ergo reliquus, E G P, erit ęqualis reliquo, T Y X, & sunt recti, E P G, T X Y, vt probatum est, ergo erunt, G P E, Y X T, similia triangula, igitur, vt, P G, ad, G E, sic erit, X Y, ad, Y T, vt verò, G E, ad, G F, sic est, Y T, ad, Y Z, & vt, G F, ad, G A, sic, Y Z, ad, Y K, ergo ex æquali, P G, ad, G A, erit vt, X Y, ad, Y K, habemus ergo duo triangula, A P G, K X Y, habentia duos angulos, A P G, K X Y, ęquales, sunt .n. recti, circa verò duos, P G A, X Y K, latera proportionalia, & reliquorum vtrumq; simul, P A G, X K Y, minorem recto, ergo erunt similia, & anguli, P G A, X Y K, ęquales, vnde reliqui, A G V, K Y Λ, pariter æquales erunt, quod est vnum propositorum.

Rursus, quia, P E, ad, E F, est vt, X T, ad, T Z; E F, autem ad, E A, vt, T Z, ad, T K, ergo ex æquali, P E, ad, E A, erit vt, X T, ad, T K, & sunt circa ęquales angulos, P E A, X T K, latera proportionalia, ergo triangula, A P E, K X T, similia erunt, nec non anguli, A P E, K X T, inclinationis secundorum planorum, A V, K Λ, cum subiectis planis inter se æquales, & ad eandem partem quod etiam demonstrare propositum fuit.

48. Primi El. Def. 6. Vndec. Elem.

Defin. 6. Vnd. El.

6. Sexti Elem.

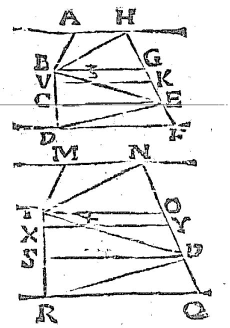
7. Sexti Elem.

6. Sexti Elem.

THEOREMA XXIV. PROPOS. XXVII.

POsita definitione, quam affert Euclides lib. 6. El. de similibus figuris rectilineis, sequitur pro ipsis etiam definitio generalis, quam de omnibus similibus figuris planis ipse attuli.

Sint duæ vtcumque figuræ rectilineæ, A B D E H, M T R P N; Prima Def. Sexti Elem. similes iuxta definitionem Euclidis, idest singulos habentes angulos æquales, A, M; B, T; D, R; P, E; H N, & circa æquales angulos latera proportionalia. Dico eadem esse similes iuxta meam definitionem: Ducantur duæ vtcumque oppositæ earum tangentes, quæ cum duobus ex lateribus homologis earumdem angulos æquales ab eadem parte contineant, sint autem ex vna parte tangentes ipsæ, A H, M N, quæ cum ipsis, H E, N P, lateribus homologis angulos continent æquales, A H G, M N O, & sint ex alia parte tangentes ipsæ, D F, R Q, quæ cum ipsis, H E, N P, productis concurrant in punctis, F, Q, ducantur deinde à punctis angulorum, qui sunt, B, E; T P, dictis tangentibus parallelæ, B G, C E, T O, S P, & iungantur, B H, B E, T N, T P. Quia ergo anguli, M N Q, A H F, sunt æquales, etiam anguli, N Q R, H F D, erunt æquales, & quia anguli, N P R, H E D, sunt quoque æquales, etiam anguli, R P Q, D E F, erunt æquales, & reliqui reliquis, vnde trianguli, R P Q, D E F, erunt æquianguli, & ideò, Q P, 4. Sexti Elem. ad, P R, erit vt, F E, ad, E D, est autem, R P, ad, P N, vt, D E, ad, E H, ergo, ex æquali, Ex Defin. Eucl. Q P, ad, P N, erit vt, F E, ad, E H, igitur, N Q, H F, sunt similiter ad eandem partem diuisæ in punctis, E, P, quia verò angulus, N P S, æquatur angulo, N Q R .i. H F D .i. H E C, &, N P R, ipsi, H E D, ideò reliquus, S P R, æquabitur reliquo, C E D, est autem angulus, T R P, æqualis angulo, B D E, ergo trianguli, P S R, E C D, erunt æquianguli, & ideò, C E, ad, E D, erit vt, S P, ad, P R, &, E D, ad, E F, erit vt, R P, ad, P Q; ergo ex æquali, & permutando, C E, ad, S P, erit vt, E F, ad, P Q .i. vt, H F, ad, N Q. Similiter 6. Sexti Elem. quia anguli, B D E, T R P, sunt æquales, & circa eos latera sunt proportionalia, ideò trianguli, B D E, T R P, erunt æquianguli, vnde anguli, D B E, R T P, &, B E D, T P R, erunt æquales, sunt autem æquales ipsi, C E D, S P R, ergo reliqui, B E C, T P S, erunt æquales, & ideò trianguli, B C E, T S P, erunt æquianguli, & quia angulus, B E F, est æqualis ipsi, T P Q, reliquus, B E H, erit æqualis reliquo, T P N, est autem, B G E, æqualis ipsi, T O P, ergo trianguli, B G E, T O P, erunt æquianguli, ergo, B G, ad, T O, erit vt, B E, ad, T P, idest vt, C E, ad, S P, idest vt, H F, ad, N Q, permutando, & conuertendo, H F, ad, G B, erit vt, N Q, ad, O T; quia verò anguli, H A B, N M T, sunt æquales, & circa eosdem latera



tera proportionalia, ideò trianguli, H A B, N M T, sunt æquianguli, 6. Sexti Elem. & anguli, A H B, M N T; A B H, M T N, inter se æquales, ergo cum anguli, A H G, M N O, sint æquales, reliqui, B H G, T N O, erunt æquales, sunt etiam æquales anguli, H G B, N O T, ergo trianguli, H B G, N T O, sunt æquianguli, ergo, B G, ad, G H, erit vt, T O, ad, O N, erat autem, F H, ad, G B, vt, Q N, ad, O T, ergo ex æquali, F H, ad, H G, erit vt, Q N, ad, N O, sunt igitur ipsæ, H F, N Q, similiter diuisæ, & ad eandem partem in punctis, G, O, & ipsæ diuidentes, B G, T O, sunt vt ipsæ, H F, N Q.

Ducantur nunc inter dictas oppositas tangentes eisdem parallelæ duæ vtcumque, V K, X Y, inter circuitum figurarum iam propositarum, & rectas, H F, N Q, comprehensæ, similiter ad eandem partem diuidentes ipsas, H F, N Q, in punctis, K, Y, secanteſque ipsas, B E, T P, in punctis, 3, 4, est ergo, F K, ad, Q Y, permutando, vt, H F, ad, Q N, idest vt, F E, ad, Q P, ergo, F K, ad, Q Y, erit vt, F E, ad, Q P, & reliqua, E K, ad reliquam, P Y, vt, F K, ad, Q Y, idest vt, F H, ad, Q N; Similiter ostendemus, vt, F H, ad, Q N, sic esse, G K, ad, O Y, ergo, G K, ad, O Y, erit vt, K E, ad, Y P, &, permutando, G K, ad, K E, erit vt, O Y, ad, Y P, componendoque, G E, ad, E K, erit vt, O P, ad, P Y, est verò, vt, G E, ad, E K, ita, B G, ad, 3 K, & vt, O P, ad, P Y, ita, T O, ad, Y 4, ergo, B G, ad, 3 K, erit vt, T O, ad, Y 4, & permutando, B G, ad, T O, erit vt, 3 K, ad, 4 Y. est verò vt, B G, ad, T O, ita, H F, ad, N Q, ergo, 3 K, ad, 4 Y, erit vt, H F, ad, N Q, similiter, quia ipsæ, V K, X Y, diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, B C, T S, in punctis, V, X, ac diuiduntur ipsæ, G E, O P, in punctis, K, Y, ideò eodem modo ostendemus ipsas, V 3, X 4, esse vt ipsas, C E, S P, idest vt ipsas, H F, N Q, erant autem, 3 K, 4 X, vt ipsæ, H F, N Q, ergo totæ, V K, X Y, erunt vt ipsæ, H F, N Q, habemus igitur figuras, A D E, M R P, in quibus ductæ sunt oppositæ tangentes, A H, D F, M N, R Q, quibus inciderunt ipsæ, H F, N Q, ad eundem angulum ex eadem parte, inuentum est autem eas, quæ inter dictas, H F, N Q, & circuitum figurarum eisdem tangentibus vtcumq; ducuntur æquidistantes, & secant dictas, H F, N Q, similiter ad eandem partem, eodem ordine sumptas, esse vt ipsas, H F, N Q, ergo figuræ, A D E, M R P, quæ erant similes iuxta definitionem Euclidis, erunt etiam similes iuxta definitionem meam, & erunt dictæ tangentes regulæ homologarum earumdem, & ipsarum, ac dictarum similium figurarum incidentes ipsæ, H F, N Q, quod erat ostendendum. Defin. 10. huius.

COROLLARIVM.

QVia verò oppositæ tangentes, AH, DF, MN, RQ, ductæ sunt vtcumque, angulos tamen æquales ad eandem partem cum homologis lateribus continentes, ideò quascumq; duxerimus oppositas tangentes in figuris rectilineis similibus iuxta Euclidem, dummodo faciant angulos æquales ad eandem partem cum lateribus homologis, easdem esse regulas homologarum similium figurarum poterit probari.

THEOREMA XXV. PROPOS. XXVIII.

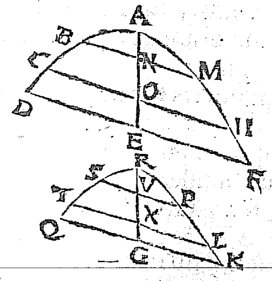
POsita infrascripta definitione similium portionum sectionum coni, illi adiuncti, quod infra dicetur, sequitur pro ipsis etiam mea definitio generalis similium planarum figurarum. Hoc autem dico pro spatijs sub ipsis sectionibus, & rectis lineis contentis, non autem pro ipsis tanquam lineis, licet crediderim Apolloniũ ipsarum similium sectionum tanquam linearum, non autem figurarum, quę fiunt ab ipsis, similitudinem attendisse, ego verò ipsam recipio tanquam ipsarum figurarum similitudini congruam, dum illi adiungitur, quod in ipsa Propos. explicatur.

DEFINITIO.

SImiles portiones sectionum coni sunt, in quarum singulis ductis lineis basi parallelis numero æqualibus, sunt ipsæ parallelæ, & bases ad abscissas diametrorum partes sumptas à verticibus, in ijsdem rationibus, tum abscissæ ipsæ ad abscissas: Apollonius lib. 6. Conicorum, vt refert Eutocius.

Sint similes portiones sectionum coni, DAF, QRK, in basibus, DF, QK, quarum diametri sint ipsæ, AE, RG, secentur autem similiter ipsæ diametri in punctis, N, O; V, X; & sit, DF, ad, EA, vt, QK, ad, GR, &, CH, ad, OA, vt, TL, ad, XR, &, PM, ad, NA, vt, SP, ad, VR; has igitur Apollonius in supradicta definitione similes vocat, mihi autem hoc opus est illi adiungere .s. quod anguli basibus, & diametris, ad eandem partem contenti sint æquales, vt angulus, AED, ipsi, RGQ, si .n. hoc non ponatur posset contingere esse bases, DF, QK, æquales, & ipsas, AE, RG, in quo casu tot figuras similes, & æquales, ex. gr. ipsi, ADF, pos-

possemus habere, quot sunt variationes inclinationum diametrorum ad bases, quam tamen variationem per definitionem supradictam excludere necessarium esse existimaui. Supposito igitur, quod tali definitioni hoc adiungatur, dico eam cum mea concordare, si pro ipsis sectionibus tanquam figuris intelligatur. Ductis enim per vertices, A, R, basibus, DF, QK, parallelis, illæ tangent dictas portiones, & inter easdem ductas habebimus ipsas, AE, RG, illis ad eundem angulum incidentes ex eadem parte, quibus similiter ad eandem partem diuisis, vt in punctis, N, O; V, X; & per eadem ductis ipsis tangentibus parallelis, BM, CH, SP, TL, inuenimus eas, quę inter ipsas, AE, RG, & circuitum figurarum, ADF, RQK, ad eandem partem continentur, & diuidunt ipsas similiter ad eandem partem, eodem ordine sumptas, esse in proportione ipsarum, AE, RG, nam quia, DF, ad, EA, est vt, GK, ad, GR, permutando, DF, ad, QK, erit vt, EA, ad, GR, & quia ipsæ, AE, RG, sunt diametri, ad quas ordinatim applicantur dictæ parallelę, ideò ab eisdem bifariam diuidentur, ergo, &, DE, ad, QG, &, EF, ad, GK, erit vt, EA, ad GR, eodem modo ostendemus tum, CO, ad, TX, tum, OH, ad, XL, esse vt, OA, ad, XR .i. vt, EA, ad, GR, & sic, BN, ad, SV, &, NM, ad, VP, esse vt, NA, ad, VR .i. vt, EA, ad, GR, sunt igitur figurę, ADF, RQK, similes iuxta meam definitionem, earum verò, & tangentium oppositarum (quarum duæ ex vna parte sunt ipsæ, DF, QK,) incidentes sunt ipsæ, AE, RG. Defin. 10.



SCHOLIVM.

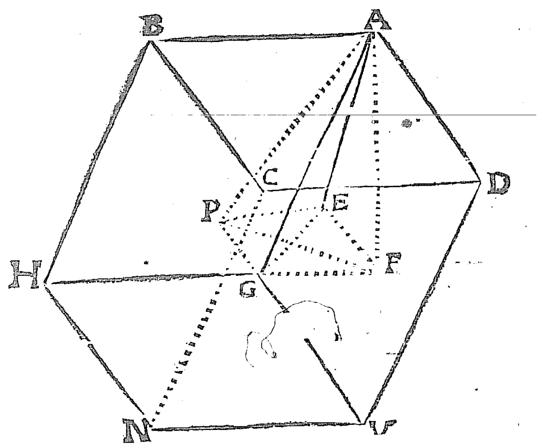
AFfert Commandinus aliam definitionem similium hyperbolarum, scilicet similes esse, quarum coniuncta diametri inter se, vel quarum figuræ latera eandem proportionem habent, quam Dauid Riualtus in Com. in Arch. lib. de Conoidib. & Sphæroidibus ad Defin. 18. ostendit concordare cum supradicta Apollonij, quam videat, qui voluerit: Hæc igitur eodem modo, quo illa Apollonij, cum mea pariter concordabit (sumpta tamen hyperbola tanquam figura) vnde hac quoque hypotesi, si opus fuerit, pariter vtemur ad passiones inde dependentes demonstrandas.

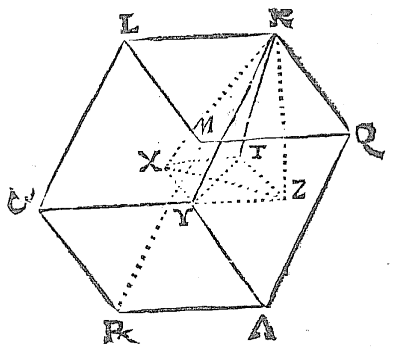
LEM-

LEMMA I.

SI sint duæ similes solidæ figuræ iuxta definit. 9. Vndec. Elem. & in earum altera duæ assumantur in ambitu quæcumque figuræ coincidentes, illæ erunt ad inuicem æquè ad eandem partem inclinatæ, ac aliæ duæ, quæ in reliqua solida figura eisdem similes esse supponuntur.

Sint similes solidæ figuræ, A N, K R, in earum autem altera, A N, sumantur duæ quæcumq; figuræ inuicem coincidentes, A V, V H, quibus in reliqua similes sint, K Λ, quidem, A V, & Λ &, ipsi, H V: Dico vtraque, AV, V H, æquè ad inuicem, & ad eandem partem esse inclinatas, ac sunt ipsę, K Λ, Λ &. Vel ergo, AG, KY, sunt subiectis planis perpẽdiculares, & tunc, AV, K Λ, erunt ipsis, H V, & Λ, erecta, vel nõ, & tunc demittantur à punctis, A, K, subiectis planis perpẽdiculares, AE, KT, & super ipsas, H G, VG, productas (si opus sit, & nisi, AG, KY, sint vel ipsis, H G, & Y, vel ipsis, G V, Y Λ, perpendiculares) similiter ad angulos rectos cadant, A P, 18. Vndecimi El.





A P, K X, quidem ipsis, V G, Λ Y, &, A F, K Z, ipsis, H G, & Y, perpendiculares, iunganturque, P E, X T, P F, X Z, &, F E, Z T. Quoniam ergo, A P G, est angulus rectus, erit quadratum, A G, æquale quadratis, G P, P A, quadratum verò, P A, 47. Primi Elem. æquatur duobus quadratis, P E, E A, propter angulum rectum, A E P, ergo quadratum, AG, hoc est duo quadrata, G E, E A, ęquabuntur tribus quadratis, G P, P E, E A, & ablato communi quadrato, E A, quadratum, G E, æquabitur quadratis, G P; P E, ergo, E P, erit perpendicularis ipsi, P V, cui etiam est perpendicularis, A P, ergo, A P E, erit inclinatio planorum, A V, V H. Eodem modo ostendemus, K X T, esse inclinationem planorum, K Λ, Λ &, & angulos, E F G, T Z Y, esse rectos. Quoniam verò angulus, A G V, æquatur ipsi, K Y Λ, (sunt .n. figuræ, A V, K Λ, similes ex hypotesi) etiam, A G P, æquabitur, K Y X, &, A P G, K X Y, recti sunt, ergo triangula, A P G, K X Y, similia erunt. Eodem modo probabimus etiam triangula, A G F, K Y Z, esse similia, ergo, P G, ad, G A, erit vt, X Y, ad, Y K, &, G A, ad, GF, vt, Y K, ad, Y Z, ergo ex æquali, P G, ad, G F, erit vt, X Y, ad, Y Z, & sunt latera proportionalia circa æquales angulos, P G F, X Y Z, (sunt .n. æquales ijs, qui sunt ad verticem, nempè, H G V, & Y Λ, qui adęquantur, cum sint similium figurarum, H G V, & Y Λ,) ergo triangula, P G F, X Y Z, erunt similia, & anguli, G P F, Y X Z, vt &, G F P, Y Z X, inter se æquales, ergo ipsi, F P E, Z X T; P F E, Z X T, inter se quoque erunt æquales, cum sint residui rectorum, G P E, G F E, Y X T, Y Z T; ergo triangula, P E F, X T Z, pariter similia erunt. Erit ergo, A P, ad, P G, vt, K X, ad, X Y; P G, ad, P F, vt, X Y, ad, X Z; &, P F, ad, P E, vt, X Z, ad, X T, ergo ex ęquali, A P, ad, P E, erit vt, K X, ad, X T, & sunt anguli, A E P, K T X, recti, ergo triangula, A P E, K X T, similia erunt, & anguli, A P E, K X T, ęquales, qui sunt inclinationes planorum, A V, K Λ, ad plana, V H, Λ &, ad eandem partem, quod ostendendum erat.

Defin. 3. Vndec. Elem. 48. Primi Elem. Defin. 6. Vndec. Elem. 6. Sexti Elem. 4. Sexti Elem. 7. Sexti Elem.

LEMMA II.

IN eadem antecedentis figura si supponamus propositas esse duas similes quæcumque rectilineas figuras, A V, K Λ, inter se, necnon, H V, & Λ, conuenientes in homologis lateribus vtriq; communibus, G V, Y Λ, sint autem homologæ inter se, A G, K Y; H G, & Y; & ipsæ figuræ æquè ad eandem partem inuicem inclinatæ. Dico angulos, A G H, K Y &, ęquales esse, & circa eosdem latera proportionalia, quod etiam de angulis, D V N, Q Λ R, pariter verum esse ostendemus. Iux. def. 1. Sexti El.

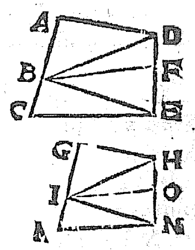
Hoc

Hoc autem ex Propol.26. huius facilè comprehendemus, funt.n. (iiſdem vt ibi conſtructis) duo oppoſita plana parallela tangentia fi- guras, A V, K ʌ, ipſa, B D, H V; L Q, & ʌ, quibus incidunt pla- na figurarum ſimilium, A V, K ʌ, ęquè ad eandem partem inclina- ta, quæ ſint nobis tanquam prima, iiſdem autem incidunt etiam ſe- cunda plana prima diuidentia, nempè plana, A G H, K Y T, anguli autem, H G V, & Y ʌ, ſunt æquales, qui nempè continentur com- munibus ſectionibus primorum, & ſecundorum planorum cum pla- nis, H V, & ʌ, quæ ſunt duo parallelorum planorum, ſimiliter an- guli, A G V, K Y ʌ, (contenti communibus ſectionibus primorum, & ſecundorum planorum, & communibus ſectionib. primorum pla- norum, & ipſorum, H V, & ʌ,) ſunt æquales, ſunt .n. ſimilium fi- gurarum, A V, K ʌ, ergo etiam anguli, A G H, K Y &, æquales erunt, vt in Propol.26. iam oſtenſum eſt. Cum autem figurę, AV, K ʌ, ſint ſimiles, &, A G, K Y, latera homologa, erit, A G, ad, G V, vt, K Y, ad, Y ʌ, oſtendemus autem eadem ratione, VG, ad, G H, eſſe vt, ʌ Y, ad, Y &, ergo ex ęquali, AG, ad, G H, erit vt, K Y, ad, Y &. Eodem modo probabimus angulos, D V N, Q ʌ R, ęquales eſſe (ſiue plana, A H, D N; K &, Q R, ſint parallela, ſiue non, hoc.n.nihil refert) & circa eos latera eſſe proportionalia, quod oſtendere opus erat.

LEMMA III.

SI in ſimilibus rectilineis figuris, iuxta Euclidem, ducantur rectæ lineæ quęcumque, earundem latera homologa ſimiliter ad ean- dem partem diuidentes, ipſę diuident eaſdem in ſimiles figuras, ſimi- les autem erunt, quę ad eandem partem diuidentium linearum con- ſtituentur, & ipſæ ſecantes earundem erunt homologa latera.

Sint ſimiles rectilineæ figuræ iuxta Euclidem, A C E D, G M N H, quibus incidant rectæ, B F, I O, ſecantes latera homologa, A C, G M; necnon, D E, H N, ſimiliter ad eandem par- tem, vt, AC, G M, in punctis, B, I, &, D E, H N, in punctis, F, O. Dico figuras ab eiſdem conſtitutas ad eandem partem, nempè, B A D F, I G H O; B C E F, I M N O, inter ſe ſimi- les eſſe. Ducantur à punctis, B, I, ad angulos oppoſitos rectæ lineæ, B D, B E, I H, I N, vt ſi figuræ ſint quadrilateræ, vel multilateræ, in triangula diſceparentur. Quoniam ergo, A C, G M, ſimiliter diuiduntur in, B, I, erit, BA, ad, I G, vt, AC, ad, G M,



G M, ideſt, vt, A D, ad, G H, ergo permutando, B A, ad, A D, erit vt, I G, ad, G H, & anguli, B A D, I G H, ſunt æquales, er- go, B A D, I G H, erunt triangula ſimilia, ergo anguli, A D B, G H I, æquales erunt, ſunt autem ęquales etiam, A D F, G H O, er- go reliqui, B D F, I H O, erunt æquales, eſt verò, B D, ad, D A, vt, I H, ad, H G, &, A D, ad, D F, vt, G H, ad, H O, ergo ex æquali, B D, ad, D F, eſt vt, I H, ad, H O, ergo triangula, B D F, I H O, pariter ſimilia erunt, & anguli, D F B, H O I, inter ſe, necnon, D B F, H I O, inter ſe ęquales, ergo anguli, A B F, G I O, A D F, G H O, erunt etiam ęquales, & figurę, A B F D, G I O H, æquiangulę, & cum, B A, ad, D F, F B, binæ ſint in eadem ratio- ne cum, I G, G H, H O, O I, patet, quod etiam circa ęquales an- gulos ſunt latera proportionalia, ergo ipſæ figuræ, B A D F, I G H O, ſimiles erunt. Eodem autem modo oſtendemus ſimiles eſſe, B C E F, I M N O, patet autem ipſas, B F, I O, eſſe earum latera ho- mologa, quod erat demonſtrandum.

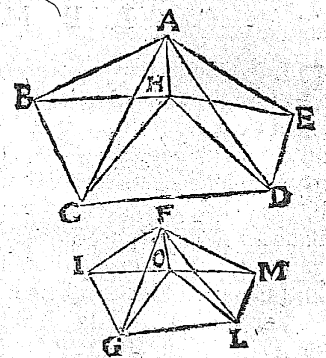
6. Sexti Elem.

LEMMA IV.

SI in ſimilibus ſolidis planis contentis iuxta def. 9. vndec. Elem. quatuor quęlibet puncta ſumantur in vnoquoq; eorundem (non tamen in eodem plano conſtituta) ad quę anguli ſolidi æquales ter- minantur, illaq; iungatur rectis lineis, fient ſimiles pyramides trian- gulatæ comprehenſæ ſub triangulis, iiſdem rectis lineis iungentibus contentis.

Defin. 9. Sexti El.

Sint ſimilia ſolida, A H C D, F O G L, iuxta def. 9. vndec. Elem. & in iis accepta quatuor quęcumq; pun- cta, nempè, A, H, C, D, in vno, &, F, O, G, L, in alio ſolido, quæ non ſint in eodem plano, ſed ad an- gulos ęquales conſtituta, iungantur- que rectis lineis, A H, A C, C D, C H, H D; F O, F G, F L, O G, G L, L O, ſiue hęc iungentia ſint ipſo- rum ſimilium ſolidorum latera. Di- co pyramides, A H C D, F O G L, ſimiles eſſe. Vel ergo plana has py- ramides continentia ſunt in ambitu ſolidorum, vt ex.gr. C H D, G O L, & tunc erunt ſimilia, ex ipſa de- finitione, vel non ſunt in ambitu, tunc autem probandum eſt nihi- lominus eſſe ſimilia, vt non ſint in ambitu ipſa triangula, A C H, F G O,



H

G O, ſint verò in ambitu triangula, A B C, F I G; A B H, F I O, H
B C, O I G, ergo tria hęc tribus iam dictis ſimilia erunt, ergo & ba-
ſes, A C H, F G O, ſimiles erunt, nam cum ſit, A C, ad, C B, vt,
F G, ad, G I; B C, ad, C H, vt, I G, ad, G O, erit ex ęquali, A C,
ad, C H, vt, F G, ad, G O, eadem ratione oſtendemus, C H, ad,
5. Sexti Elem. H A, eſſe vt, G O, ad, O F, ex quo habebitur ex ęquali, C A, ad,
A H, eſſe vt, G F, ad, F O, ergo triangula, A C H, F G O, ſimilia
erunt. Eodem modo probabimus triangula, A H D, F L O, A C D,
F G L, eſſe ſimilia, ex quo concludemus ipſas pyramides ſimiles eſſe.
Quod ſi tria triangula ad, B, I, terminantia omnia non ſint in am-
bitu, oſtendemus tamen illa eſſe ſimilia, erunt .n. vel baſes pyrami-
dum, quarum tria triangula verticalia erunt in ambitu, vel ſaltem
aliarum pyramidum, quarum triangula ſimilia eſſe probabuntur,
quia erunt baſes pyramidum tria triangula verticalia in ambitu ha-
bentium, ad hæc .n. tandem deuenire neceſſe erit: Igitur oſtenſum
eſt, quod proponebatur.

COROLLARIVM.

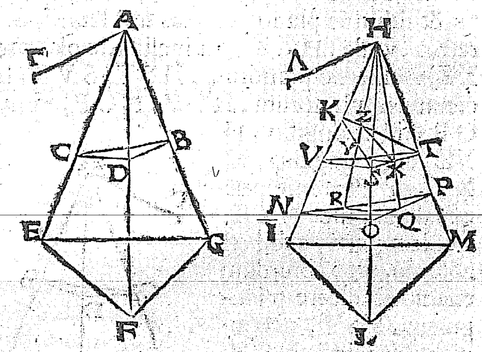
*QVia verò in pyramidibus triangulatis, B A H C, I F G O, exiſten-
tibus ſimilibus illarum triangulis verticalibus, baſes, A C H, F
G O, neceſſariò ſimiles eſſe oſtenſæ ſunt, ideò ex hoc colligimus ſi
in duabus pyramidibus triangulatis tria verticalia triangula tribus ver-
ticalibus triangulis ſimilia ſint, etiam baſes ſimiles eſſe.*

LEMMA V.

SI duo ſimilia triangula fuerint ſubiectis planis æquè ad eandem
partem inclinata, ita vt communes cum illis ſectiones ſint ea-
rum latera homologa, quæ tanquam baſes aſſumantur; ab eorum
autem verticibus rectæ lineæ in ſublimi fuerint conſtitutæ, angulos
æquales cum eorum lateribus homologis continentes, illæ erunt ſu-
biectis planis æqualiter inclinatæ, vel eiſdem ambo parallelæ; ſi au-
tem fuerint inclinatæ, & vſque ad ſubiecta plana producantur, iun-
ganturq; pucta occurſuum cum extremis baſium dictorum triangu-
lorum, pariter hinc conſtitutæ pyramides ſimiles erunt.

Sint ſimilia triangula, A B D, H P O, ſubiectis planis ęquè incli-
nata, in baſibus, B D, P O, à quorum verticibus, A, H, rectæ li-
neæ, A C, H N, in ſublimi conſtitutæ contineant cum homologis
eorum lateribus angulos æquales, ſint nempè anguli, C A B, N H
P, necnon, C A D, V H O, inter ſe æquales. Dico ipſas, A C, H
N, ſubiectis planis eſſe equaliter inclinatas, vel eiſdem ambo paral-
lelas,

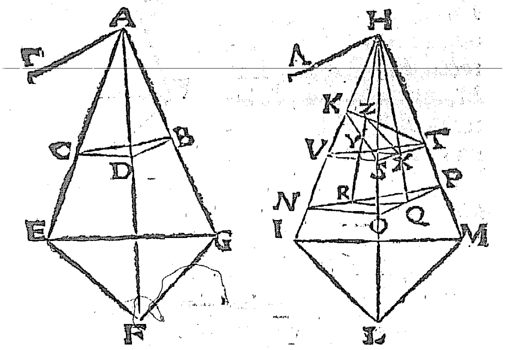
lelas, ac (ſi ſint inclinatę, incidantque ipſis in punctis, C, N, iun-
ganturque, C B, C D, N P, N Q,) pyramides, A C D B, H N O
P, ſimiles eſſe. Sumatur ergo in, A D, etiam quantumuis protenſa
vbicumq; punctum, F, & accipiatur in, H O, producta, ſi opus ſit,
H L, ęqualis, A F, & indefinitè extenſis lineis, A C, A B, H N, H
P, ducantur in planis, F A C, F A G, L H N, L H P, à punctis, F, Vid. dicta lib. 7. Annot. Propoſ. 3.
L, ipſis, A F, H L, per-
pendiculares, F E, F G,
L I, L M, occurrentes
ipſis, A E, A G, H I, H
M, in punctis, E, G, I,
M, & iungantur, E G,
I M. Quoniam ergo duo
anguli, A F G, H L M,
recti, &, F A G, L H
M, ſunt æquales, & la-
tera, A F, H L, ęqua-
lia, erunt etiam, F G,
L M, G A, M H, ęqua- 26. Primi Elem.
lia; eodem modo oſten-
demus æqualia eſſe, F



E, L I, E A, I H, vnde cum ſint ęquales, E A, I H, A G, H M, & 4. Primi Elem.
anguli, E A G, I H M, pariter ęquales, etiam baſes, E G, I M, æ-
quales erunt, & pyramides, A E F G, H I L M, ſimiles, & ęquales
ad inuicem exiſtent. Suſpendatur nunc pyramis, A E F G, & pona- Defin. 10. vndec. El.
tur punctum, F, in, L, demittaturque, F G, ſuper, L M, cui con-
gruet, ſed & triangulo, E F G, cadente ſuper, I L M, punctum, E,
erit in, I, ac latus, A F, in, H L, alioquin duę eidem plano, I L M, 7. Pri. El.
perpendiculares eſſent eductæ ab eodem puncto, L, quod eſt abſur-
dum (ſunt autem, A F, H L, perpendiculares planis, E F G, I L M,
hoc eſt ſolo plano, I L M, cum ſuperponuntur, ex eo, quod duabus, 13. Vnd. Elem.
I L, I M, ſint perpendiculares in puncto, L,) ergo, F A, cadet ſu-
per, L H, & punctum, A, in, H, vnde etiam, E A, cadet in, I H, 4. Vnd. El.
&, A G, in, H M, punctum, B, verò eſto, quod ſit in, T, D, in,
S, &, C, in, V, erit etiam, D B, congruens ipſi, S T, C D, V S,
&, C B, ipſi, V T, & quia angulus, A B D, æquatur ipſi, H P O,
A B D, autem eſt etiam æqualis, H T S, ergo, H T S, H P O, ſunt
æquales, &, S T, parallela, O P. Dico etiam triangulum, V S T, 4. Primi Elem.
æquidiſtare ipſi, N O P, ſi .n. hoc non ſit, quia, S T, eſt parallela
ipſi, O P, poterit per, S T, duci planum ipſi, N O P, parallelum,
ducatur, & producat in pyramide triangulum, K S T, acta autem à
puncto, H, ipſi, O P, perpendiculari, quę ſit, H Q, ſecante, S T,

 in,

in, X, ducatur in plano, N O P, recta, Q R, à puncto, Q, perpen-
dicularis ipsi, O P, & iungatur, H R, triangulumque, H R Q, se-
cet duo triangula, V S T, K S T, in rectis, Y X, Z X. Quia ergo
16.Vnd. Elem. triangula, V S T, N O P, sunt parallela, erunt etiam ipsę, Z X, R
Q, parallelæ, sed &, S T, O P, sunt parallelę, ergo anguli, Z X S,
10.Vnd. Elem. R Q O, erunt æquales, rectus ergo est etiam ipse, Z X S, sed etiam,
S X H, rectus est, ergo, S X, est duabus, Z X, X H, perpendicula-
ris, & subinde plano per ipsas transeunti, & consequenter, S X Y, est
4.Vndec. Elem. rectus, vnde, H X Z, erit inclinatio planorum, H S T, K S T, &, H
X Y, inclinatio planorum, H S T, S V T, hæc autem est æqualis in-
clinationi planorum, H O P, N O P, ex hypotesi, idest angulo, H
Q R, idest angulo, H
X Z, ergo angulus, H
X Y, qui est totum, est
ęqualis angulo, H X Z,
eiusdem parti, quod est
absurdū, ergo absurdum
etiam est dicere trian-
gulum, V S T, non æ-
quidistare ipsi, N O P,
æquidistat ergo, & ip-
16.Vnd. Elem. sæ, V S, V T, sunt e-
tiam parallelæ ipsis, N
O, N P, & triangula,
V H S, ipsi, N H O, V
H T, ipsi, N H P, nec-
non, V S T, ipsi, N O P, sunt similia, ergo pyramides, H V S T,
H N O P, sunt similes, est autem pyramis, H V S T, similis, immo
& ęqualis, ipsi, A C D B, ergo pyramides, A C D B, H N O P, in-
ter se similes erunt, & anguli, A C B, H V T, A C D, H V S, inter
se æquales, ergo, A C, H V, rectę lineę stantes in sublimi, & cum
ipsis, C D, C B, V S, V T, angulos æquales continentes (à quibus
35.Vnd. Elem. etiam contenti anguli, D C B, S V T, sunt ęquales) erunt ad plana
triangulorum, C D B, N O P, æqualiter inclinata, & sunt ipsæ py-
ramides, A C D B, H N O P, similes, vt propositum fuit demon-
strare.



Si verò rectæ lineæ angulos æquales cum ipsis, D A, A B, O H,
H P, continentes essent ipsæ, A Γ, H Λ, quarum, Λ H, esset paral-
lela plano, V S T, probaremus etiam, Γ A, esse parallelam plano,
C D B, alioquin si cum ipso producta concurreret, etiam, Λ H, ex
supra ostensis, producta concurreret cum plano trianguli, V S T. Vel
præintellectis duabus iam datis, A C, H N, & supposita superiori
con-

constructione, ostenderemus, vt supra, tria latera, Γ A, Λ H; A D,
H O; A B, H P; esse ad inuicem superposita, vnde si, Λ H, æquidi-
stat plano, N O P, etiam necesse esse concluderetur, Λ H, seu, Γ A,
in ea constitutam, æquidistare plano, N O P, vel ipsi, V S T, seu,
Γ A, ipsi, C D B, quod erat ostendendum.

COROLLARIUM.

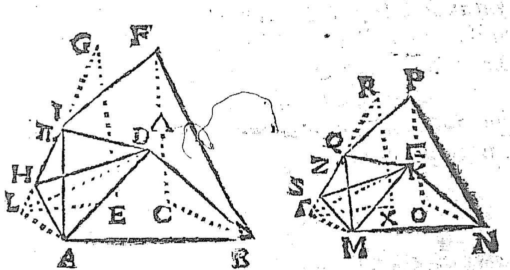
*Ex hoc Lemmate colligitur similium solidorum, iuxta Euclidis de-
finitionem, latera homologa quæcunque, vel (duabus in ambitu
quibuscumque figuris similibus assumptis) iacere in plano similium di-
ctarum figurarum, aut illis æquidistare, vel æqualiter eisdem inclinari;
Vt in figura Lemmatis 4. ex. gr. C D, G L, (assumptis similibus figuris,
H C D, O G L,) iacent in earum plano, B A, I F, autem vel ambo illi
æquidistant, vel eisdem sunt æqualiter inclinata, nam iunctis, A C, A
H, F G, F O, nisi hæc sint latera dictorum solidorum, fiunt anguli, B A* Lemma 4.
*H, I F O, B A C, I F G, æquales, & triangula, A C H, F G O, similia,
nam pyramides, A B C H, F I G O, sunt inter se similes, ipsa verò trian-* Lemma 1.
*gula, A C H, F G O, æquè ad eandem partem inclinantur ipsis, H C D,
O G L, cum etiam, A C H D, F G L O, pyramides sint similes ex eodem
Lemmate 4. vnde vel, A B, F I, æquidistant basibus, C H D, G O L, vel
sunt eisdem æqualiter inclinata, idem de cæteris homologis quibuscum-
que lateribus, quibuslibet similibus figuris in ambitu assumptis compa-
ratis, pariter intelligendum erit.*

LEMMA VI.

SI in similibus solidis iuxta Euclidem ducantur plana duabus qui-
buscumque similibus figuris in eorum ambitu assumptis paralle-
la, quæ vt eorum bases accipiantur; diuidant autem ducta plana eo-
rum altitudines, respectu dictarum basium captas, similiter ad ean-
dem partem, quęcumque latera homologa ab eisdem secabuntur, si-
militer ad eandem partem diuidentur.

Sint in similibus solidis iuxta Euclidis definition. 9. Vndec. Elem.
assumptę in ambitu duæ similes figurę tanquam bases, ex. gr. trian-
gula similia, A D B, M K N, sint verò de ambitu etiam descripta
triangula similia, A H I, M S Q; A H D, M S K; &, I H D, Q S
K; quibus etiam adiungantur latera homologa, I F, Q P, ad verti-
ces, F, P, respectu dictarum basium captos, pertingentia, reliquis
dimissis figuris eorum ambitum complentibus, ne nimia fieret Sche-
matis confusio, sint autem à verticibus, F, P, demissæ altitudines
respectu basium, A D B, M K N, ipsę, F C, P O, planis basium in
pun-

punctis, P, O, occurrentes, ductis autem duobus planis quomodo-
cumque basibus parallelis, & secantibus altitudines, F C, P O, simi-
liter ad eandem partem in punctis, Λ Γ, eadem secent latera homo-
loga ex. gr. I H, Q S, in punctis, Π Z. Dico in eisdem secari simi-
liter ad eandem partem. Producantur ergo, H I, S Q, hinc inde,
ita vt (nisi hoc ipsis contingat absque eo, quod producantur) ad pla-
na basium, D A B, K M N, & eisdem æquidistantia plana per ver-
tices, F, P, ducta, terminentur, vt in punctis, L, T, G, R, à pun-
ctis verò, G, R, demittantur ad plana dictarum basium perpendicu-
lares, G E, R X, illis incidentes in, E, X, & iungantur, L, E, T X.
Similiter à verticibus, F, P, ad puncta basium, B, N, ducantur, F
B, P N, & iungantur, B C, N O. Quoniam ergo latera homolo-
ga, H I, S Q, continent cum homologis lateribus similium trian-
gulorum, A I D, M Q K, ad eandem partem basibus, D A B, K M
N, inclinatorum (quia, I A D B, Q M N K, essent similes pyrami-
Ex Lem. 5. des) angulos equales, & producta incidunt in plana dictarum basium
in, L, T, erunt eisdem æqualiter inclinata, ergo anguli, G L E, R
T X, erunt equales,
&, G E L, R X T,
sunt recti, ergo triã-
gula, G L E, R T
X, similia erunt, er-
go, G L, ad, R T,
erit vt, G E, ad, R
X, idest vt, F C, ad
PO. Vlterius si iun-
geremus, F A, F D,
P M, P K, fierent
similes pyramides,



Ex Lem. 4. F D A B, P K M N, vnde pateret, F B, P N, esse ad plana basium,
D A B, K M N, similiter inclinata, & subinde angulos, F B C, P
N O, esse equales, & cum sint recti, F C B, P N O, triangula, F B
C, P N O, esse æquiangula, & vt, F C, ad, P O, ita esse, F B, ad,
P N, etiam manifestum esset, sed vt, F C, ad, P O, ita est, G L, ad,
R T, & vt, F B, ad, P N, ita, B D, ad, N K, & ita quodcunque
latus in solido, F H B, ad latus sibi homologum in solido, P S N,
19. Quin. Elem. idest ita, I H, ad, Q S, ergo vt, G L, ad, R T, ita, H I, ad, S Q,
& ita compositum ex residuis, L H, I G, ad compositum ex residuis,
T S, Q R, sunt autem, L H, T S, latera homologa similium pyra-
Ex Lem. 5. midum, H L A D, S T M K, ergo vt, H A, ad, S M, vel vt, H I,
ad, S Q, ita, H L, ad, S T, ergo etiam reliqua, I G, ad reliquam,
Q R, est vt, H I, ad, S Q, vel vt altitudo, F C, ad, P O, vel vt, G
L, ad,

L, ad, R T, vel vt, G Π, ad, R Z, sunt enim & ipsæ, G L, R T,
similiter ad eandem partem sectę in punctis, Π, Z, nam similiter se-
cantur ac, F C, P O, in punctis, Λ, Γ, ergo etiam reliqua, I Π, ad,
Q Z, erit vt tota, G Π, ad totam, R Z, idest vt, F C, ad, P O. Eo-
dem modo ostendemus, Π H, ad, Z S, esse vt, F C, ad, P O, er-
go, I Π, ad, Q Z, erit vt, Π H, ad, Z S, & permutando, I Π, ad,
Π H, erit vt, Q Z, ad, Z S, sunt ergo latera homologa, I H, Q S,
similiter ad eandem partem secta à præfatis planis, quod eodem mo-
do de quibuscumq; homologis lateribus, quæ contingat dictis planis
secari, pariter ostendemus, hoc verò demonstrare propositum fuit.

COROLLARIVM.

Ex hoc autem Lemmate insuper habetur nedum latera homologa similium solidorum, sed etiam, si illa producantur vsq; ad opposita tangentia plana, eorum residua, vel ipsa tota, esse vt eorum dictas altitudines.

THEOREMA XXVI. PROPOS. XXIX.

SI in duobus similibus solidis iuxta defin. 9. vndec. Elem. accipiantur, ac in eorumdem ambitu, duæ quæcumq; similes figurę planę tanquam bases, quibus parallela ducantur quæcumq; plana eadem secantia, necnon eorum altitudines, respectu dictarum basium assumptas, similiter ad eandem partem diuidentia. *Productæ iisdem in solidis figuræ similes erunt iuxta definitionem 10. huius, & omnium homologæ duabus quibusdam regulis æquidistabunt.*

Sint similia solida iuxta defin. 9. vndec. Elem. ipsa, A E F S O G o, T l & p f 8 s, in eorum autem ambitu capiantur similes quæcumque figurę planę, O G F S, f 8 & p, quibus parallela ducantur duo quęcumque plana eadem secantia, necnon & altitudines respectu dictarum basium assumptas similiter ad eandem partem diuidentia, ac in ipsis solidis figuras, L H M P, Y V Z d, producentia. Dico has esse similes figuras planas iuxta defin. 10. huius, omniumque sic productarum in dictis solidis homologas duabus quibusdam regulis, vt ex. gr. ipsis, O S, f p, æquidistare. Igitur figurarum ambientium dicta solida duæ aliæ similes quæcumq; capiantur cum basibus concurrentes, vt ex. gr. o O S, s f p, similia triangula, ducantur autem prefatis basibus opposita tangentia plana, A C, T R, secantia producta pla-

plana figurarum, o O S, s p f, in rectis, B C, Q R, quibus occurrant, O o, f s, productæ vt in punctis, B, Q, & iungantur, S B, p Q, esto autem, quod plana figurarum, L H M P, Y V Z d, diuiserint plana figurarum, o O S, s f p, producta in rectis, K N, u g, quę ab ipsis, B S, Q p, B O, Q f, secentur in, I, X, K u, & iungantur, L K, P I, Y u, d X. Quoniam ergo plana figurarum, H M P L, V Z d Y, prędictas altitudines similiter ad eandem partem diuidentia, secant latera homologa, a o, T s, similiter ad eandem partem in punctis, L, Y, vt etiam, A G, T 8, in, H V, erunt figurę, A L H, T Y V, ad eandem partem secantium, H L, V Y, constitutæ inter se similes, & earum latera homologa ipsę, H L, V Y; eodem modo ostendemus similes esse ipsas, E A L P, l T Yd, & earum latera homologa ipsas, L P, Yd, sunt autem figuræ, A E P L, A L H, inuicem ad eandem partem æquè inclinatæ, ac ipsæ, T l d Y, T Y V, cum sint in planis similium figurarum, A E S o, T l p s, A G O o, T 8 f s, quę sunt inuicem ad eandem partem æquè inclinatę, ergo anguli, H L P, V Y d, homologis lateribus contenti erunt ęquales, & circa eosdem latera erunt proportionalia. Eodem modo ostēdemus cæteros angulos, L P M, Y d Z, inter se, necnon, P M H, d Z V, ac, M H L, Z V Y, æquales esse, & circa æquales angulos latera existere proportionalia, ergo figuræ, L H M P, Y V Z d, similes erunt iuxta Euclidem, ergo etiam similes erunt iuxta definit. 10. huius.

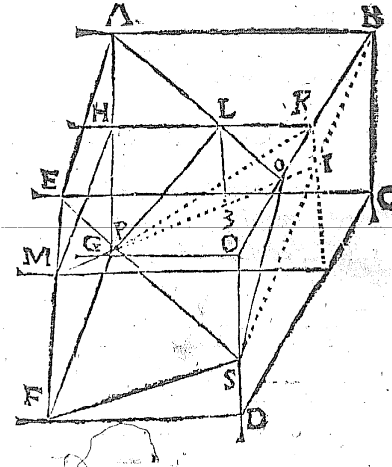
Ex Lem. ant.

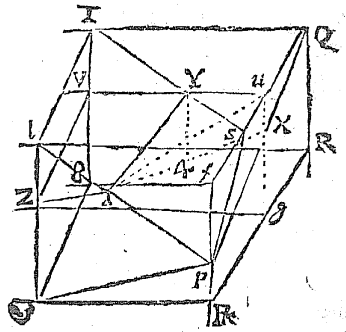
Ex Lem. 3.

Ex Lem. 1.

Ex Lem. 2.

Defin. 1. Sex. El.





Reliquum est, vt demonstremus earum homologas duabus assumptis

ptis regulis, O S, f p, omnes ęquidistare: Et quidem si plana secent figuras, o O S, s f p, hoc manifestum est, etenim productę lineę ipsis basibus, O S, s p, erunt parallelæ, & latera homologa similium figurarum ex traiectis planis in solidis productarum. Si verò plana parallela secent duas figuras ipsis, o O S, s f p, continuatas, vti faciunt plana figurarum, H M P L, V Z d Y, quæ etiam secant plana figurarum, o O S, s f p, producta in rectis, K N, u g, ostendemus ipsas, K N, u g, esse regulas homologarum similium figurarum, L H M P, V Z d Y, iunctis, P K, d u. Quia enim, O o, f s, sunt ipsorum similium solidorum latera homologa, producta, ac terminata ad basium plana, & oppositorum tangentium, in punctis, O, B; f, Q, ideò, B O, Q f, sunt similiter ad eandem partem sectæ in, o, s, & nedum, O o, f s, sed etiam, o B, s Q, sunt vt eorum altitudines sumptæ respectu dictarum basium, sed sic etiam sunt ipsæ, o S, s p, latera homologa, ergo, B o, ad, o S, est vt, Q s, ad, s p, & angulos æquales, B o S, Q s p, complectuntur latera proportionalia, ergo triangula, B o S, Q s p, sunt similia, cum verò sint in planis triangulorum, o O S, s f p, sunt etiam similibus figuris, L P S o, Y d p s, ęquè ad eandem partem inclinata, quibus communia sunt homologa latera, o S, s p, ergo anguli, K o L, u s Y, inter se, necnon, P S I, d p X, æquales erunt; cum verò, B S, Q p, sint vt dictæ altitudines, & sic etiam, I S, X p, necnon, P S, d p, (etenim, B S, Q p, in, I, X, &, E S, l p, similiter secantur, & ad eandem partem, in punctis, P, d,) erit, I S, ad, S P, vt, X p, ad, p d, & circumstant angulos æquales, I S P, X p d, ergo triangula, I S P, X p d, sunt similia. Eodem modo ostendemus similia esse triangula, L o K, Y s u. Vlterius, quia est, K o, ad, o S, vt, u s, ad, s p, &, o S, ad, S I, vt, s p, ad, p X, & anguli, K o S, u s p, necnon, o S I, s p X, sunt æquales, ideò trapezia, K o S I, u s p X, erunt similia, sed etiam figuræ, L P S o, Y d p s, sunt similes, est autem, K L, ad, L o, vt, u Y, ad, Y s, &, o L, ad, L P, vt, s Y, ad, Y d, ergo, K L, ad, L P, erit vt, u Y, ad, Y d, eodem modo autem ostendemus, L P, P I, I K, K L, binas esse in eadem proportione cum ipsis, Yd, d X, X u, u Y. Manifestum est autem si iungeremus, A O, T f, A S, T p, quod fierent similes pyramides triangulatæ ipsæ, A O o S, T f s p, similibus n. triangulis comprehenderentur, vt meditanti compertum fiet, ideò plana, A o O, T s f, idest triangula similia, L K o, Y u s, sunt æquè ad eandem partem ipsis similibus figuris, L P S o, Y d p s, inclinata, cum quibus coincidunt in lateribus homologis, L o, Y s, ergo anguli, K L P, u Y d, erunt æquales, quibus circumstant latera proportionalia, vt probatum est, ergo triangula, K L P, u Y d, similia erunt, & erit, K P, ad, P L, vt, u d, ad, d Y, est verò, P L,

Elicitur ex Corol. Lem. 6.

6. Sex. El.

Ex Lem. 1.

Corollar. Lem. 6.

Corol. 26 huius.

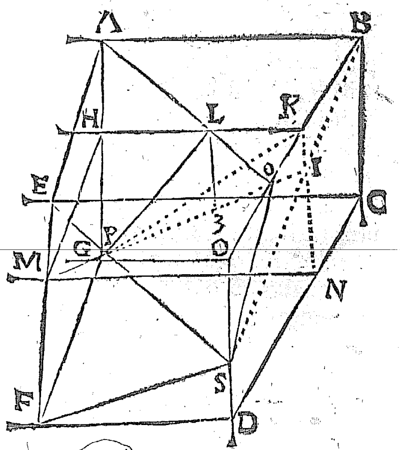
6. Sex. El.

Ex Lem. 4.

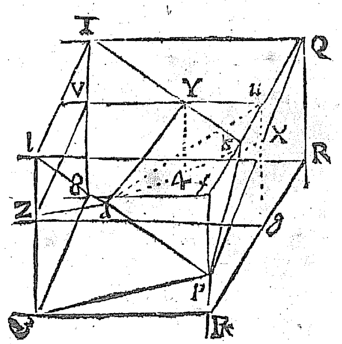
Ex Lem. 1.

Ex Lem. 2.

ad, PI, vt, dY, ad, dX, ergo ex æquali, KP, ad, PI, erit vt, u d, ad, dX, eſt autem, PI, ad, IK, vt, dX, ad, Xu, ergo triangula quoque, PKI, duX, pariter ſimilia erunt, vnde anguli, LPI, YdX; PIK, dXu, &, IKL, XuY, æquales erunt. Ducantur nunc in planis figurarum, LHMP, YVZd, à punctis, L, Y, parallelæ, KN, ug, ipſæ, L3, Y4. Cum igitur anguli, LKI, YuX, ſint equales, etiam,



Corol.27 huius. KL3, uY4, æquales erunt, ſed &, KLP, uYd, ſunt æquales, ergo reſidui quoque, 3LP, 4Yd, erunt equales, vnde cum ipſæ, L3, Y4, contineant cum lateribus homologis, LP, Yd, ad eandem partem angulos æquales, erunt regulę homologarum ſimilium figurarum, LHMP, YVZd, vnde etiam ipſæ, KN, ug, vel ipſæ, OS, fp, erunt regulæ homologarum earundem, ſunt.n. OS, KN, parallelæ; vt etiam, ug, fp, vnde omnes homologæ ſimilium figurarum, LHMP, YVZd, ipſis regulis, OS, fp, æquidiſtabunt, quod & de cęteris eodem modo oſtendetur, dum ſectio fiet in figuris, AESo, Tlps. Quod ſi figuris, AESO, Tlps, aliæ figuræ planæ continuarentur citra cōtactum planorum baſibus oppoſitorum, cum his in lateribus homologis, AE, Tl, conuenientes, quibus eſſent inclinatę, parum diſſimili methodo, producentes, OB,



fQ, vſq; ad tangentia plana, & occurſuum puncta cum ipſis, S, p, iungentes, necnon extrema laterum homologorum, qualia fuerunt, LP, Yd, cum extremis rectarum in triangulis (qualia fuerunt, BOS, Qfp,) productarum, pariter iungentes, vt fecimus cum ipſis, KI, uX,

uX, oſtenderemus figuras his ductis comprehenſas, quales fuerunt, LPIK, YdXu, eſſe ſimiles, ex quo propoſitum quoque noſtrum haberemus. Similiter ſi anguli ſolidi, Q, f, pluribus, quam tribus angulis planis contineantur, currit tamen demonſtratio, cum triangula, GOo, 8fs, licet non ſint in ambitu ſolidorum ſint tamen ſimilia, & ęquè ad eandem partem inclinata figuris, cum quibus concurrunt, etenim ex. gr. pyramides, SGOo, p8fs, ſi eorum latera iungerentur, ſimiles eſſent, quapropter ipſius demonſtrationis vis non eneruatur. Similiter ſi, oOS, sfp, non eſſent triangula, ſed aliæ quæcumque figuræ ſimiles, pro, oS, sp, acceptis lateribus ipſis, Oo, fs, adiuncta, os, conterminantibus, & planis ad hæc latera pariter terminantibus, eodem modo demonſtratio abſolueretur: hæc omnia autem ſingillatim proſequi nimis longum, ac ſchematibus rem aperire, res tricis plena eſſet, quapropter Lectoris induſtriæ hoc relinquo, ſi enim ea rectè perceperit, quę ſuperius explicata ſunt, circa huius veritatem minimè hæſitabit, infinita autem ſimilium ſolidorum planis contentorum varietas efficit, vt ægrè ipſius demonſtrationis vniuerſalitatem oculis ſubijcere poſſim, quod Lector æqui, bonique faciat, hæc verò oſtendenda proponebantur. Ex Lem. 4. & 1.

THEOREMA XXVII. PROPOS. XXX.

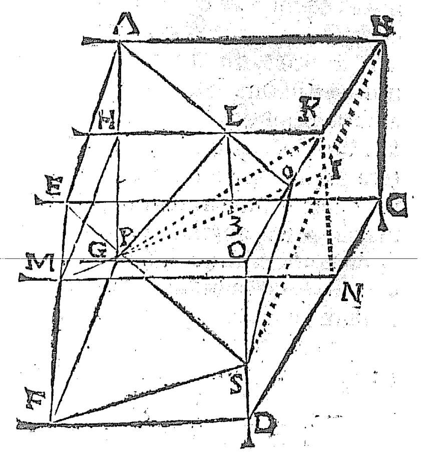
Poſita definit. 9. vndec. Elem. ſimilium ſolidarum figurarum, ſequitur, & mea definitio generalis ſimilium ſolidorum.

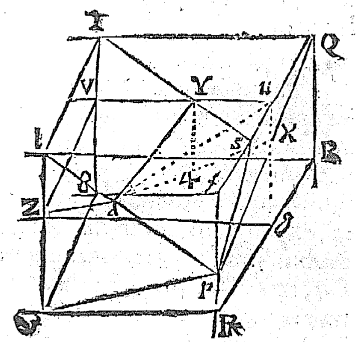
Aſſumptis denuò antec. Propoſ. figuris, ſint adhuc ſimilia ſolida iuxta Euclidem ipſa, AGS, T8p. Dico eadem eſſe etiam ſimilia iuxta definit. 11. huius, quam de ſimilibus ſolidis generaliter attuli. Sint autem ducta eadem oppoſita tangentia plana, vt ibi, ita vt duę ſimiles figurę, GFSO, f8&p, ſint plana contactuum ex vna parte, ex alia verò ſint plana tangentia, AC, TR, captis autem alijs duabus ſimilibus figuris cum baſibus concurrentibus, ipſis nempè, OSo, fps, illarum plana extendantur, ita vt ſecent oppoſita tangentia plana, in rectis nempè, BC, OD; QR, fR; extenſis autem vlterius planis, GOō, 8fs, quę nunc ſint in ambitibus ſolidorum ipſa ſecent oppoſita tangentia plana in rectis, AB, TQ; GO, 8f, & plana figurarum, OSO, fps, producta in rectis, BO, Qf, ſecentur verò hęc ſolida duobus planis oppoſitis tangentibus parallelis vtcumque, & ſint illa eadem, quę in ſolidis produxerunt figuras, LHMP, YVZd, iſtæ ergo ſimiles erunt, & earum homologæ, ſi pro regulis assumamus iterum ipsas, O S, f p, eisdem quoque æquidistabunt, ergo in eisdem figuris habebimus etiam homologas alias æquidistantes regulis quibuscumque cum ipsis, O S, f p, angulos æquales ad eandem partem continentibus, cum ergo ipsæ, G O, 8 f, angulos æquales cum ipsis, O S, f p, ad eandem partem contineant, ideò omnium homologæ pariter duabus, G O, 8 f, tanquam nouis regulis ęquidistabunt, istis autem, quæ tangunt ex vna parte figuras, G F S O, 8 & p f, ducantur ex alia parte oppositæ tangentes, F D, & ℞, ita vt incidant duę, G O, F D, plano, B D, in punctis, O, D, & duæ, 8 f, & ℞, plano, Q ℞, in punctis, f, ℞, sint autem iunctæ, OD, f ℞. Similiter figurarum, H M P L, V Z d Y, sint ductę oppositæ tangentes præfatis regulis, G O, 8 f, parallelæ, planis, B D, Q ℞, occurrentes in punctis, K, N; u g, iungantur autem, K N, u g, & ita cæterarum sic producibilium figurarum intelligantur ductæ oppositæ tangentes ipsis, G O, 8 f, parallelæ, & productæ vsque ad plana, B D, Q ℞, punctaq; occursuum iuncta rectis lineis, per quarum omnium extrema transeant lineæ, B O, C D, Q f, R ℞. Cum ergo, G O, 8 f, sint homologarum regulæ, ac oppositę tangentes figurarum similium, O G F S, f 8 & p, incidant autem illis ad eundem angulum ex eadem parte, O D, f ℞, & sit, G O, ad, f 8, vt, O D, ad, f ℞, ideò, O D, f ℞, erunt incidentes similium figurarum, O G F S, f 8 & p, & oppositarum tangentium, G O, F D, 8 f, & ℞. Similiter in figuris, H M P L, V Z d Y, ostendemus esse ipsarum inci-

Iuxta def. 10. huius.

huius 5. 2

24. huius.





incidentes, ac oppositarum tangentium, H K, M N, V u, Z g, ipsas, K N, u g, si .n. iungeremus, M K, Z u, probaretur, M H, ad, H K, esse vt, Z V, ad, V u, (sunt .n. similes figuræ, H M P L, V Z d Y, necnon, L P K, Y d u, circumstant autem latera proportionalia angulos æquales, M H K, Z V u, & ideò ostenderemus triangula, M H K, Z V u, esse similia, vnde pateret angulos, H K M, V u Z, esse æquales, sed etiam, H K N, V u g, sunt ęquales, ergo pateret angulos, M K N, Z u g, esse æquales, sunt autem etiam æquales, M N K, Z g u, ergo triangula, M K N, Z u g, essent æquiangula, vnde, M N, ad, Z g, esset vt, K N, ad, u g, incidunt autem, K N, u g, oppositis tangentibus, H K, M N, V u, Z g, ad eundem angulum ex eadem parte, ergo ipsarum tangentium, ac figurarum sunt incidentes, K N, u g, cum verò, K N, ad, u g, sit vt, M K, ad, Z u, idest vt, M H, ad, Z V, vel vt quoduis solidorum latus homologum ad quoduis latus homologum, idest vt, G O, ad, 8 f, idest vt, O D, ad, f ℞; O D, autem ad, f ℞, sit vt, B o, ad, Q f, ideò, K N, ad, u g, erit vt, B O, ad, Q f, & diuidunt similiter ad eandem partem ipsas, B O, Q f, in punctis, K u, quæ incidunt ipsis, B C, O D, Q f, R ℞, ad eundem angulum ex eadem parte, sunt .n. anguli, B O D, Q f ℞, æquales, quod & de cæteris incidentibus probabitur, ergo figurę, B O D C, Q f ℞ R, quę capiunt omnes dictas incidentes, sunt similes, & arum homologę ipsę incidentes, quarum omnium regulæ sunt, O D, f ℞, & sunt ipsę figurę, B D, Q ℞, æquè ad eandem partem ipsis basibus inclinatę, cum sint in planis figurarum, o O S, s f p, ergo dicta solida sunt etiam similia iuxta defin. 11. huius. Quod si plana, G O o, 8 f s, non essent in ambitu similium dictorum solidorum, facilè tamen ostenderemus portiones solidorum vltra eadem plana existentes esse similes, ac ipsarum, & oppositorum tangentium planorum iam dictorum incidentes reperiri in planis figurarum, B D, Q ℞, cum eisdem integrantes figuras incidentes integrorum similium solidorum, ac dictorum oppositorum tangentium, quod speculanti facilè innotescet, hoc autem erat ostendendum.

6. Sex. El.

24. huius.

Defin. 10. huius.

Lem. h.

LEMMA A.

Circuli omnes, necnon semicirculi sunt similes iuxta meam definitionem similium planarum figurarum, & eorum, & tangentium oppositarum, quæ ab extremitatibus diametrorum ducuntur, incidentes sunt ipsi diametri.

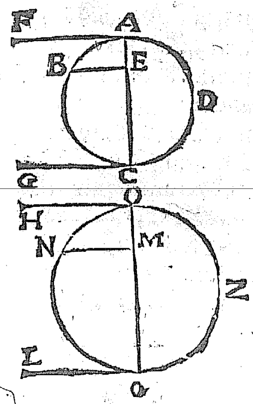
Sint circuli, A B C D, O N Q, quorum diametri, A C, O Q, per quorum extrema ducantur tangentes, F A, G C, H O, L Q. Dico hos

hos circulos esse similes iuxta meam definitionem similium planarum figurarum, & eorum, & ductarum oppositarum tangentium incidentes esse ipsas diametros, A C, O Q, quæ etiam de semicirculis verificantur. Diametri ergo, AC, O Q, diuidantur similiter ad eandem partem in punctis, E, M, à quibus vsque ad circumferentiam ducantur ipsæ, E B, M N, parallelæ dictis tangentibus, quæ cum ad angulos rectos diametros diuidant, etiam ipsę, B E, N M, erunt illis perpendiculares, igitur quadratum, B E, erit ęquale rectangulo, A E C, sicuti quadratum, N M, æquale rectangulo, O M Q, rectangulum autem, A E C, ad quadratum, E C, est vt, A E, ad, E C, idest vt, OM, ad, M Q, idest

2.Sex.El. vt rectangulum, OMQ, ad quadratum, MQ, idest vt quadratum, N M, ad quadratum, M Q, ergo quadratum, B E, ad quadratum, E C, est vt quadratum, N M, ad quadratum, M Q, (quæ autem hic supponuntur, vel petantur ex Eucl. lib. Elem. vel ex sequenti meo lib.

8. Lib. 2. sequen. vel 20. Sex.El. in quo, quæ hic assumuntur independenter ab hoc Lemmate demonstratur) ergo, B E, ad, E C, erit vt, N M, ad, M Q, permutando, B E, ad, N M, erit vt, E C, ad, M Q, vel vt, A C, ad, O Q, igitur, quæ æquidistant ipsis tangentibus, F A, H O, & similiter ad eandem partem vtcumque diuidunt ipsas, A C, O Q, & iacent inter ipsas, & circuitus semicirculorum, A B C, O N Q, ad eandem partem, eodem or-

Defin. 10. dine sumptæ, sunt vt ipsæ, A C, O Q, quæ dictis tangentibus incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, quę ideò sunt earum incidentes, ergo semicirculi, A B C, O N Q, sunt figuræ planæ similes iuxta meam definitionem, quarum & oppositarum tangentium, quę ab extremitate diametrorum ducuntur, incidentes sunt ipsi diametri; sic etiam patebit semicirculos, A D C, O Z Q, necnon circulos, AC, O Q, esse similes, iuxta eandem definitionem; quod ostendendum erat.



THEOREMA XXVIII. PROPOS. XXXI.

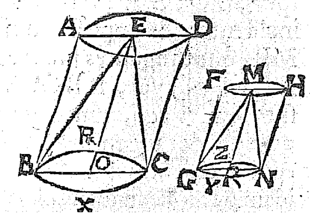
Positis infrascriptis definitionibus similium cylindrorum, & conorum, sequitur definitio generalis, quam de similibus solidis ipse attuli.

DE-

DEFINITIO.

Similes coni, & cylindri sunt, quorum & axes, & basium diametri eandem inter se proportionem habent, Euclid. lib. 11. Elem. defin. 24.

Verum, quia supradicta definito non est nisi cylindrorum, & conorum rectorum, ideò aliam, quę affertur à Commandino tum de rectis, tum etiam de scalenis illi subiungo, quam sufficiet ostendere cum mea supradicta concordare, nam hęc Commandini eam, quam Euclides attulit, inuoluit.



DEFINITIO.

Similes coni, & cylindri, siue recti, siue scaleni sunt, quando per axes ductis planis ad rectos angulos basibus, communes sectiones eorum, & basium cum axibus æquales angulos continentes, eandem inter se, quam axes, proportionem habent: Commandinus loco definitionis supra citatæ.

Sint coni, B E C, G M N, & cylindri, A C, F N, similes iuxta Defin. 11. proximam definitionem. Dico eosdem esse similes iuxta meam supradictam. Vt autem in simul pro conis, & cylindris fiat demonstratio, supponantur coni, & cylindri iam dicti esse in eisdem basibus, & circa eosdem axes; ducantur ergo in ipsis plana per axes, qui sint, E O, M R, quoniam ergo latera cylindrorum sunt suis axibus parallela, ideò dicta plana transibunt per latera cylindrorum, siue Ex.def.3. cylindricorum, A C, F N, & per latera conorum, siue conicorum, & 4.Cor. E B C, M G N, quia per eorum vertices intra ipsos ducuntur, sint autem dicta plana ea, quę sint ad rectos angulos basibus, quorum & basium communes sectiones, quæ sint, B C, G N, cum axibus æquales angulos continentes eandem inter se, quam axes proportionem habeant, vt fert definitio, fient igitur in cylindricis parallelogramma, vt, A C, F N, & in conicis triangula, vt, B E C, G M N, Ex Cor.5. & quia anguli, B O E, G R M, sunt ęquales, ideò etiam ipsi, B C D, & ex 16. G N H, sunt æquales, & est, B C, ad, C D, vt, G N, ad, N H, huius. ideò parallelogramma, A C, F N, & triangula, B E C, G M N, erunt similia iuxta definitionem Euclidis, & ideò etiam iuxta meam, & quia ipsæ, A D, B C, F H, G N, tangunt figuras, A C, F N, 27.huius.

qui-

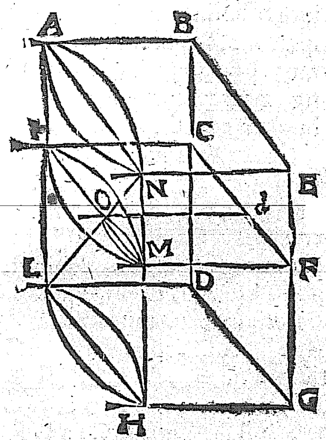
quibus incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, E O, M R, &
quę diuidunt ipsas, E O, M R, similiter ad eandem partem existen-
tes parallelæ ipsis, B C, G N, sunt vt ipsæ, E O, M R, ad eandem
partem eodem ordine inter ipsas, & circuitum dictarum figurarum
comprænhensæ, quia quæ sunt ex vna parte sunt æquales ipsis, B O,
G R, & quæ ex alia ipsis, O C, R N, in triangulis autem sunt, vt
ipsæ, B O, G R, vel, O C, R N, .i. vt, O E, R M, & ideo, earum
B.defin. 10. incidentes, & oppositarum tangentium dictarum erunt ipsæ, E O,
M R, quę tangentes sunt regulæ homologarum similium figurarum,
A C, F N, vel, E B C, M G N. Vlterius, quia, B X C, G Y N,
sunt semicirculi, erunt figurę planę similes iuxta meam definitionem,
Ex Lem. ant. quarum & tangentium, quæ per extrema, B C, G N, ducuntur e-
runt incidentes ipsi diametri, B C, G N, vt probatum fuit, veluti
idem patet de semicirculis, B R C, G Z N, & de quibuscumq; alijs,
quæ diuident ipsas, E O, M R, similiter ad eandem partem, & con-
17. Vndecimi El. sequenter diuidunt etiam altitudines eorũdem respectu basium sum-
ptas similiter ad eandem partem, & de ijs, quæ per extrema, E, M,
ducuntur, habemus igitur cylindros, A C, F N, siue conos, B E C,
G M N, quorum ducta sunt plana opposita tangentia dictorum so-
lidorum homologis figuris parallela, quæ sunt plana, B R C X, A
D; G Y N Z, F H, quibus inciderunt duo plana ad ęquales angulos
ex eadem parte, illa nempè, in quibus sunt ipsa parallelogramma,
A C, F N, vel triangula, B E C, quia sunt recta ad bases .i. ad dicta
tangentia, ipsæ autem figuræ .i. parallelogramma, vel triangula in-
uenta sunt esse similia, quarum homologarum regulæ opposite tan-
gentes, A D, B C; F H, G N, quarum sunt incidentes, E O, M R,
earum autem lineæ homologæ, sumptæ regulis dictis tangentibus,
repertæ sunt esse incidentes figurarum planarum similium, quæ di-
uidunt altitudines dictorum solidorum iam dictas similiter ad ean-
dem partem, & oppositarum tangentium, quæ omnes ijs, quæ du-
cuntur per extrema, B C, G N, tangentes circulos, B R C X, G Y
N Z, sunt ęquidistantes, vt facilè consideranti patebit, ergo cylin-
Defin. 11. dri, A C, F N, vel coni, B E C, G M N, sunt similes iuxta meam defi-
nitionem generalem similium solidorum, quod ostendere opus erat.

THEOREMA XXIX. PROPOS. XXXII.

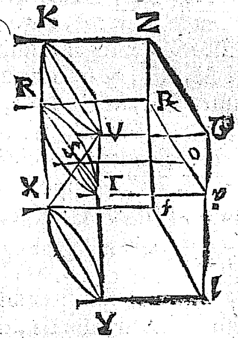
DEfinitio mea similium conicorum, & cylindricorum concordat cum definitione generali similium solidorum.

Sint

Sint cylindrici quicunque, A H, K Y; seu conici in ijsdem basibus,
& altitudinibus (vt vna vice vtriusq; demonstrationem absoluamus)
N L H, V X Y, similes iuxta definit. 7. huius. Dico eosdem etiam
esse similes iuxta definit. 11. Quoniam ergo vtraque prædicta solida Defin. 7.
sunt similia, erunt bases, L H, X Y, similes, ducantur earum oppo-
sitę tangentes, quę sint homologarum regulę, ipsę, L D, H G, X f, Coroll. 1.
Y l, quarum, & prædictarum simi-



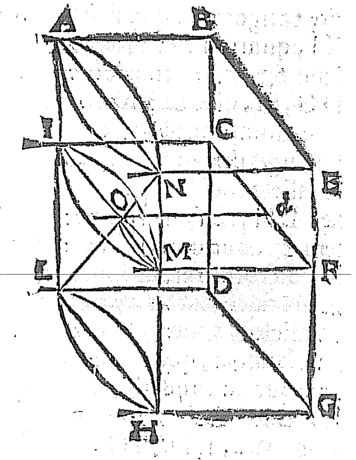
B.Def. 10.
lium figurarum incidentes sint ipsæ,
D G, f l, quæ etiam pro regulis alia-
rum homologarum sumi poterunt, Coroll. 23.
sint ergo duę quæcunque homologę
parallelę incidentibus, D G, f l, ip-
sæ, L H, X Y, si ergo per has, & la- Defin. 7.
tera cylindricorum, vel conicorum
iam dictorum extendantur plana, ab
ijs producentur in cylindricis similia
parallelogramma, & in conicis simi-
lia triangula, quę etiam erunt ad ba-
ses æquè ad eandem partem inclina-
ta. Extendantur ergo per oppositas
tangentes, L D, H G; X f, Y l, pla-
na tangentia tam cylindricos, quam
conicos iam dictos, & hęc simul cum
planis basium indefinitè producan-
tur ad partes incidentium, D G, f l,
& tandem per, D G, f l, cum sint
parallelæ, extendantur plana ipsis,
AH, KY, parallela secantia iam pro-
ducta plana in rectis, D G, G E, E
B, B D, D E, f l, l &, & Z, Z f, f
&, erunt ergo parallelepipeda, AG,
K l, & prismata, L N G D, X V l f,
ergo erit parallelogrammum, B G,
simile ipsi, A H, &, Z l, simile, K
Y, quæ cum sint inter se similia, e-
tiam, B G, Z l, erunt similia, sic e-
tiam ostendemus triangula, E D G,
& f l, esse similia, sub intellige iuxta
definitionem Euclidis, ergo erunt e-

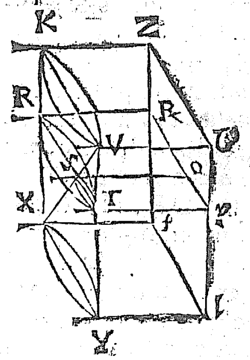


Defin. 13. vndec. El.
24. Vnd. Elem.

tiam similia iuxta defin. 10. Ducantur duo plana oppositis tangenti- 27. huius.
bus intermedia, ac parallela, altitudines dictorum solidorum respectu
basium, L H, X Y, sumptas, similiter ad eandem partem diuidentia,

quæ in cylindricis producant figuras, I M, R T, in conicis verò, O
M, S T, secent verò plana tangentia in rectis, I C, M F, O d; r ℞,
16. Vnd. Elem. T p, S o, istæ ergo erunt ad inuicem parallelæ, & tangent figuras,
I M, R T, O M, S T, eadem verò plana secent plana, B G, Z l, in
Corol. 9. Corol. 18. rectis, C F, ℞ p. Quod ergo figuræ,
I M, R T, vel, O M, S T, sint simi-
12. Et 19. huius. les basibus, & ijsdem similiter positę
iam ostensum fuit, ex quo fit, vt &
ipsarum, & quarumcunq; sic in prę-
fatis solidis producibilium similium
figurarum homologæ duabus qui-
busdam regulis, vt ex.gr. ipsis, H G,
Y l, semper æquidistent. Reliquum
est autem, vt probemus, C F, ℞ p,
vel, d F, o p, esse prædictarum in-
cidentes. Cum ergo duæ, I C, C F,
10. Vnd. Elem. duabus, L D, D G, ęquidistent an-
guli, I C F, L D G, æquales erunt,
sic etiam probabimus esse æquales,
R ℞ p, X f l, cum verò, I C, sit e-
tiam æqualis, L D, &, R ℞, ipsi,
X f, necnon, C F, ipsi, D G, &,
℞ p, ipsi, f l, erit; I C, ad, R ℞, vt,
C F, ad, ℞ p, & incidunt ipsis, I C,
M F, R ℞, T p, ad eundem angu-
lum ex eadem parte, ergo, C F, ℞
p, erunt incidentes similium figura-
3. huius. rum, I M, R T, & oppositarum tan-
gentium, I C, M F; R ℞, T p, ea-
dem ratione demonstrabimus, d F,
o p, esse incidentes similium figura-
rum, O M, S T, & oppositarum tan-
gentium, O d, M F; S o, T p, est
autem, d F, ad, o p, vt, d E, ad,
o &, scilicet, vt, D E, ad, f &, nam,
D E, f &, sunt similiter ad eandem
17. Vnd. Elem. partem diuisæ in punctis, d o, (ete-
nim altitudines dictorum solidorum per plana, I F, R p, similiter ad
eandem partem diuiduntur) ergo, d F, o p, æquidistantes oppositis
tangentibus, B E, D G, Z &, f l, sunt homologæ figurarum simi-
lium, E D G, & f l, quarum & oppositarum tangentium incidentes
erunt ipsæ, E D, & f. Eodem modo ostendemus, C F, ℞ p, esse
ho-



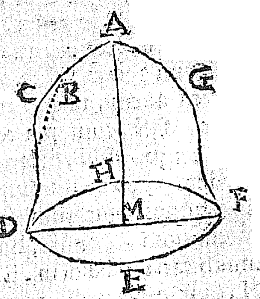


homologas similium figurarum, B G, Z l, quarum & oppositarum
tangentium, B E, D G, Z &, f l, incidentes sunt ipsæ, B D, Z f,
hæc autem etiam in cęteris traiectis planis, vt dictum est contingere
ostendemus, ergo, B G, Z l, E D G, & f l, erunt figurę incidentes
similium cylindricorum, seu conicorum iam dictorum, & opposito-
rum tangentium planorum, A E, L G, K &, X L, ergo in his soli-
dis adsunt omnes conditiones defin. 11. vt recolenti easdem patefiet,
igitur erunt iuxta eandem pariter similia. Aduerte autem, quod sup-
posui planum, N G, tangere tam cylindricum, quam conicum, vt
etiam, V l, ne figura nimis confunderetur, & vt fierent latera, E
G, & l, communia parallelogrammis, B G, Z l, & triangulis, D
E G, f & l, valebit tamen eadem demonstratio etiamsi plana ducta
per, H G, Y l, tangentia cylindricos, diuersa sint à planis per easdem,
H G, Y l, transeuntibus, ac tangentibus ipsos conicos, fient enim
semper similia triangula, E D G, & f l, etiamsi non adiaceant late-
ribus, E G, & l, vt consideranti facilè patebit, hæc autem nobis o-
stendenda erant.

THEOREMA XXX. PROPOS. XXXIII.

SI solidum rotundum secetur plano per axem, producta in eo figura erit, quæ per reuolutionem ipsum genuit.

Sit solidum rotundum, cuius axis, A M, basis circulus, H D E F, Defin. 6.
hoc autem plano per axem, A M, ducto secetur, quod in eo produ-
cat figuram, A C D F G. Dico hanc
esse eam, quæ per reuolutionem ip-
sum solidum genuit. Intelligatur re-
uolui circa, A M, figura, quę dictum
solidum genuit, donec reperiatur po-
sita in plano figuræ, A C D F G, igi-
tur vel harum figurarum perimetri
congruunt, vel non, si sic ex illis fa-
cta erit vna figura, ea nempè, quæ
per reuolutionem generat dictum so-
lidum, si verò non congruant, ali-
quis punctus alterius ambituum di-
ctarum figurarum non reperietur in
reliquæ ambitu, sit is punctus, B, qui
reperiatur in ambitu figuræ, quæ per reuolutionem dictum solidum
descripsit, quæ sit ipsa, A B D F G, & non in ambitu figurę, A C D
F G, cuius ambitus est communis sectio plani ducti per axem, & su-
per-

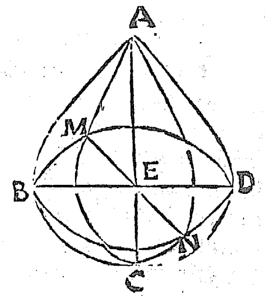


perficiei dictum solidum ambientis, quia igitur, B, non est in communi sectione iam dicta, & est in plano figuræ, A C D F G, igitur erit intra, vel extra superficiem ambientem dictum solidum, est autem in ambitu figuræ, quæ tali ambitu dictam superficiem describit, ergo erit in ipsa superficie ambiente, & non erit, quod est absurdum, non igitur aliquis punctus ambitus figuræ, quæ dictam solidum per reuolutionem generat est extra ambitum figuræ, A C D F G, igitur isti ambitus, & consequenter ipsæ figuræ sibi inuicem congruunt, & sit vna figura, ea scilicet, quæ per reuolutionem dictum solidum rotundum generat, quod erat demonstrandum.

THEOREMA XXXI. PROPOS. XXXIV.

SI solidum rotūdum secetur plano ad axem recto, fiet concepta in ipso figura circulus, cuius centrum erit in axe.

Sit solidum rotundum, cuius axis, A C, & figura, quæ ipsum per reuolutionem genuit ipsa, A B C D, secetur autem plano ad axem recto, ex quo in ipso producatur figura, M B N D. Dico hanc esse circulum, cuius centrum erit in axe, vt, E, sit autem communis sectio plani recti ad axem, & figuræ, A B C D, recta, B D, quia ergo
Defin. 6. figura, A B C D, est circa axem, ipsa autem, B D, quæ rectè axim secat, vna est ex ordinatim ad ipsam axim applicatis, ideò ab ea bifariam diuiditur in puncto, E, ducatur nunc aliud planum per axem, quod in dicto solido pro-
Ex antec. ducat figuram, A M C N, quæ secet figuram, M B N D, in recta, M N, erit ergo hæc figura eadem ei, quæ per reuolutionem dictum genuit solidum, & ideò erit figura circa axem, ad quam ordinatim applicatur, M N, cum ipsa rectè axem, A C, diuidat, ergo, M N, bifariam diuiditur in, E, eodem pacto quæcumq; alias communes sectiones figurarum per axem, A C, transeuntium, & figuræ, B N D M, ostendemus bifariam diuidi in, E. Vlterius, quia figuræ, A B C D, A M C N, sunt eædem illi, quæ per reuolutionem generat solidum; A B C D, &, B D, M N, transeunt per idem punctum axis, A C, rectè eundem secantes, ideo si ipsa, A M C N, reuolueretur, donec esset in plano figuræ, A B C D, illi congrueret, &, M N, ipsi, B D, vnde, M N, B D, sunt æquales, & ideò earum dimidiæ, N E, E B, M E, E



E, E D, erunt æquales, eodem pacto ostendemus quascumque ductas à puncto, E, ad lineam ambientem, M B N D, esse æquales cuilibet ipsarum, B E, E N, E D, E M, ergo figura, M B N D, erit circulus, cuius centrum, E, in axe reperitur, quod erat ostendendum.

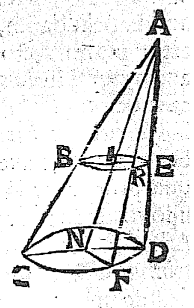
COROLLARIVM.

Colligimus autem ipsas, B D, M N, communes sectiones figurarum per axem ductarum, & circulorum, qui per sectionem dicti solidi per plana ad axem recta in eo producuntur, esse eorum diametros, cum per centrum transeant.

THEOREMA XXXII. PROPOS. XXXV.

SI quicunq; conus secetur plano basi æquidistante concepta in cono figura erit circulus centrum in axe habens.

Si conus sit rectus patet hoc ex antecedenti Propos. cæterum si sit scalenus, qualis sit conus, A C F D, qui secetur plano basi, C F D, æquidistante, quod in eo producat figuram, B R E. Dico ipsam esse circulum, centrum in axe habentem. Secetur ergo plano per axem, 16. huius.
quod in eo producat triangulum, A C D, cuius & circuli, C F D, communis sectio sit, C D, quę erit diameter dicti circuli; eius autem & figuræ, B R E, communis sectio, B E; sunt igitur trianguli, A B 4. Sex. El.
I, A C N, similes, quia, B I, ęquidistat ipsi, C N, ergo, C N, ad, N A, erit vt, B I, ad, I A, eodem modo ostendemus, A N, ad, N D, esse vt, B I, ad, I E, ergo, ex æquo, C N, ad, N D, erit vt, B I, ad, I E, sed, C N, est ęqualis, N D, ergo &, B I, ipsi, I E. Ducatur nunc aliud planum per axem, quod producat triangulum, A N F, quodq; secet figuram, B R E, in, I R, fient ergo trianguli, A I R, A N F, æquianguli, ergo, F N, N A, N C, erunt lineæ in eadem proportione cum ipsis, R I, I A, I B, ergo, ex ęquo, F N, ad, N C, erit vt, R I, ad, I B, sed, F N, est æqualis ipsi, N C, ergo, R I, erit æqualis ipsi, I B, eodem modo ostendemus quascunque ductas à puncto, I, ad lineam ambientem, B R E, esse æquales ipsi, B I, ergo figura, B R E, erit circulus, cuius centrum, I, quod ostendere oportebat.



CO-

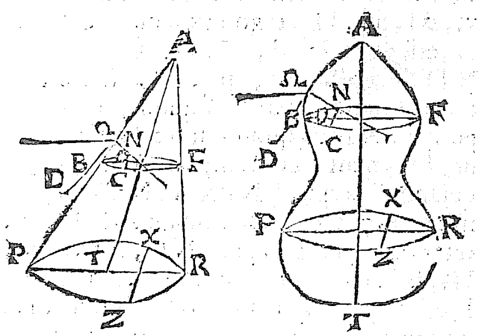
COROLLARIVM.

Hinc patet ipsam, BE, communem sectionem trianguli per axem ducti, & circuli, BRE, esse eiusdem diametrum, cum per eius centrum transeat.

THEOREMA XXXIII. PROPOS. XXXVI.

Si solidum rotundum, vel conus scalenus secentur plano per axem, deinde secetur solidum rotundum (nisi basim habeat, quę circulus erit) plano ad axem recto circulum producente, in cuius plano, & illius, qui est coni basis perpendicularis ducta sit basi figurę per axim ductę; deinde sumpto puncto in ambitu figuræ per axem, per illum æquidistans dictæ perpendiculari ducta fuerit recta linea, hæc tanget dicta solida, at si sumptus punctus sit extra talem ambitum, sed in superficie ambiente dicta solida, quæ per ipsum ducitur eidem æquidistans intra dicta solida cadet, & producta vsque ad superficiem ambientem à figura ducta per axem bifariam diuidetur.

Sit solidum rotundum, ABTF, vel conus scalenus, APR, in basi circulo, PXRZ, quorum axis, AT, & si solidum rotundum non habeat basim, secetur plano recto ad axem, quod in eo producat circulum, PXRZ, secentur autem ambo planis per axem, quæ producant in solido rotundo figuram, APTF, & in cono triangulum, APR, deinde in plano circuli, PZRX, ducatur ipsi, PR, communi sectioni dicti circuli, & figuræ per axem, perpendicularis, ZX, & sumpto puncto in ambitu figurę per axem, vt, 2, per ipsum ducatur recta linea parallela ipsi, ZX.



ZX. Dico hanc tangere dicta solida, si enim non tangit secet, veluti, D 2 N, in puncto, N, igitur punctus. n. erit extra planum figuræ per axem, nam ipsa, D 2 N, est parallela ipsi, ZX, quæ est ad rectos angulos figuræ per axem transeunti; & ideò etiam, D 2 N, est illi ad rectos angulos, occurrit autem illi in puncto, 2, ergo non occurret illi in alio puncto, ergo, N, est extra planum figuræ per axem, ducatur per, N, planum æquidistans plano, PXRZ, circuli, quod producat circulum, BNFC, & sit, BF, communis sectio ipsius circuli, & figuræ per axem, quæ erit ipsius circuli diameter, &, N, non erit aliquis punctorum, BF, ergo si ab, N, duxerimus ipsi, ZX, parallelam, vt, NC, cum etiam, BF, sit parallela ipsi, PR, continebunt angulos æquales, sed, ZX, secat perpendiculariter, PR, ergo, NC, secabit perpendiculariter, BF, ducta non ab extremitate diametri, ergo intra circulum, BCFN, erit, & bifariam secabitur ab ipsa, BF, ergo non transibit per circuitum figuræ per axem ductæ, & per ipsum transit, D 2 N, ergo, NC, N 2 D, sunt duæ rectæ lineæ eidem, ZX, parallelę, ergo etiam inter se erunt parallelæ, quod est absurdum, cum transeant per idem punctum, N, ergo ducta per punctum ambitus figuræ per axem parallela ipsi, ZX, tanget dicta solida: Sit nobis nunc punctus, N, pro puncto vtcunq; in superficie ambiente sumpto extra circuitum figuræ per axem, à quo ducta ipsi, ZX, parallela, occurrat producta superficiei ambienti in puncto, C, ostendemus ergò eodem modo supra adhibito (postquam duxerimus per, N, planum circulo, PXRZ, æquidistans, quod in solido producat circulum, BNFC,) ipsam, NC, intra circulum, BNFC, cadere, & bifariam diuidi à recta, BF, siue à figura per axem ducta (nam est, NC, perpendicularis ipsi, BF,) quod ostendere opus erat.

8. Vndec. Elem.

34. huius.

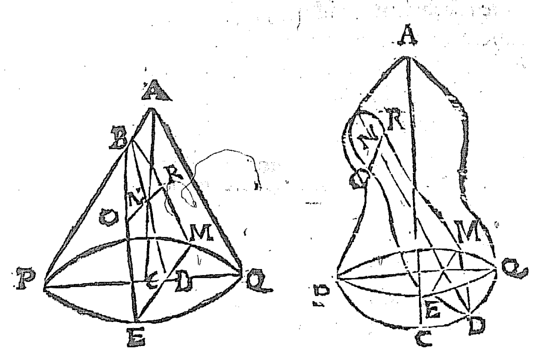
Corol. 34 huius.

10. Vnd. Elem.

THEOREMA XXXIV. PROPOS. XXXVII.

Si solidum rotundum, vel conus scalenus, secentur plano per axem, & deinde alio plano secentur, cuius, & vnius planorum rectè axem secantium communis sectio sit recta linea perpendicularis communi sectioni eiusdem, & plani per axem; figura à secundo secante plano in solido producta erit circa axem, in cono scaleno autem erit circa axem, vel diametrum, & axis, vel diameter erit communis sectio per dicta secantia plana productarum figurarum.

Sit solidum rotundum, A P C Q, & conus scalenus, A P E Q M, vtraque autem secentur plano per axem, quod producat figuram, A P C Q, in solido, & triangulum, A P Q, in cono, deinde secentur altero plano, cuius, & plani recti ad axem (quo productus sit circulus, P M Q E,) communis sectio sit, E M, perpendicularis ipsi, P Q, communi sectioni eiusdem, & plani per axem ducti. Dico figuram, 6. Defin. B E D M, in solido rotundo esse circa axem, & in cono circa axem, vel diametrum, & axem, vel diametrum esse, B D, communem sectionem productarum figurarum. Si ergo secundò producta figura 33. huius. per axem pariter ducta esset, manifestum est in solido rotundo fore 16. huius. figuram talem circa axem, & in cono fore triangulum, in quo axis, A C, si secaret æquidistantes basi talis trianguli ad angulos rectos, cum illas bifariam diuidat, esset talis triangulus figura circa axem, si verò ad angulos non rectos, esset figura circa diametrum, nempè circa, A C. Sed non transeat hęc secunda figura per axem, sint autem puncta, B, D, extrema communis sectionis primæ, & secundę figuræ, idest ipsius, B D, ergo in solido rotundo (& in cono, dum triangulus, A P Q, per axem ductus transit etiam per ductam à vertice, A, perpēdicularem ipsi basi, P E Q M, idest cum triangulus, APQ, est erectus basi, P E



4. Defin. vndec. El. Q M,) ipsa, E M, communis sectio secundi plani secantis, &, P Q, plani rectè axim secantis, cum sit perpendicularis, P Q, communi sectioni planorum, PEQM, APQ, ad inuicem erectorum, erit etiam perpendicularis plano per axem, & ideò erit perpendicularis ad omnes per eam in tali plano transeuntes, ideò, BD, rectè secabit ipsam, E M, & quæ ducuntur per extrema, B D, æquidistantes ipsi, E M, tangent ipsa solida, vnde, B, D, erunt oppositi vertices figurarum, 1. Defin. B E D M, respectu ipsius, E M, sumptarum, quare, B D, secabit omnes illi æquidistantes in figura, B E D M, ductas, & quia sumpto Corol. 2. 4. Huius. in figura, B E D M, puncto, qui non sit vertex respectu ipsius, E M, Coroll. 1. & ab eo ducta eidem, E M, parallela intra figuram cadit, sit is pun- 4. Huius. ctus, O, à quo ipsi, E M, sit ducta parallela ipsa, O R, igitur, O R, ter-

terminans in ambientem superficiem bifariam diuidetur ab ipsa, BD, Ex antec. vt in, N; Sic ostendemus, B D, diuidere cæteras omnes ipsi, E M, æquidistantes in superficiem ambientem hinc inde terminatas, & quia, B D, secat, E M, ad angulos rectos, cæteras omnes iam dictas bifariam, & ad angulos rectos secabit, igitur tunc figura, B E D M, erit circa axem, B D, siue in solido rotundo, siue in cono: Si autem triangulus, A P Q, non transeat per ductam ipsi plano perpendicularem, tunc eodem modo, quo supra ostendemus, B D, secare omnes ęquidistantes ipsi, E M, bifariam, & quia triangulus, A P Q, non transit per perpendicularem basi, neque erit erectus ipsi basi, P E Q M, ergo angulus, E D B, non erit rectus, nam si esset rectus, cum sit etiam rectus, E D P, planum circuli, P E Q M, esset erectum triangulo, A P Q, & ille huic, quod est contra suppositum, igitur, 4. Vndec. Elem. B D, secabit, E M, & consequenter cæteras iam dictas illi æquidistantes bifariam, & ad angulos non rectos, igitur figura, E B M, tunc erit circa diametrum, & erit diameter ipsa, B D, siue axis, in supradicto casu tum in cono, tum etiam in solido rotundo, quod erat ostendendum.

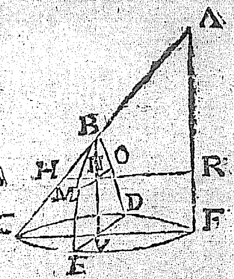
COROLLARIVM.

Hinc colligitur in cono, si triangulus per axem ductus sit erectus basi, fieri dictam figuram circa axem; si verò non sit erectus, sed inclinatus eidem, fieri figuram circa diametrum; in solido rotundo autem fieri semper figuram circa axem.

THEOREMA XXXV. PROPOS. XXXVIII.

SI conus secetur plano per axem, secetur deinde altero plano secante basim coni secundum rectam lineam, quę ad basim trianguli per axem sit perpendicularis, cuius & trianguli per axem cōmunis sectio sit parallela vni laterum trianguli per axem; quadrata ordinatim applicatarum ad axim, vel diametrum figurę in cono secundo plano productę, æquidistantium eiusdem, & basis communi sectioni erunt inter se, vt abscissæ per easdem ordinatim applicatas versus verticem sumptæ ab eisdem axibus, vel diametris iam dictis.

Sit conus, cuius vertex, A, basis circulus, C E F D, secetur autem
15. huius. prius plano per axem, quod in eo producat triangulum, A C F, se-
cetur deinde altero plano basim secante secundum rectam, E D, per-
Ex antec. pendicularem ipsi, C F, cuius in cono concepta sit figura, B E D,
erit ergo hæc figura circa axem, vel diametrum, B V, quę sit paral-
lela ipsi, A F, cuius vertex respectu ipsius, E D, erit, B; ducatur à
puncto, M, qui non sit punctus, B, sed vtcumque sumptus in linea,
E B D, extra basim, E D, ipsi, E D, recta ęquidistans, M O, pro-
ducta vsq; ad ambientem superficiem, cui occurrat in, O, igitur hęc
erit vna ex ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, B V, ęqui-
distans ipsi, E D, quę bifariam diuidetur ab ipsa, B V, in puncto, N,
ducatur per, N, ipsi, C F, parallela, H R, est verò etiam, M O, ipsi,
15. Vndecim. El. E D, parallela, ergo planum transiens per, H R, M O, æquidista-
bit basi, C E F D, & quatuor puncta, H, M, R, O, erunt in circuli
35. huius. periphæria, cuius diameter, H R, quem
secat, M O, perpendiculariter, nam an-
14. Secun. Elem. gulus, H N M, æquatur angulo, C V E,
qui rectus est, ergo quadratum, M N, æ-
quatur rectangulo, H N R, & quadra-
tum, E V, rectangulo, C V F, est autem
rectangulum, C V F, ad rectangulum, H
N R, (quia eorum altitudines, V F, N R,
sunt æquales, cum sint parallelogrammi,
N F, opposita latera) vt basis, C V, ad,
H N, ex prima Sexti Elem. vel ex quinta
libro sequentis independenter ab hac de-
monstrata, & quia, H N, est parallela



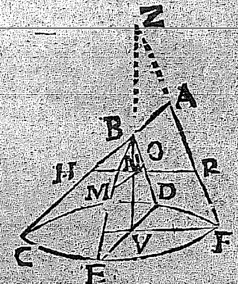
4. Sexti Elem. ipsi, C V, trianguli, B H N, B C V, sunt æquianguli, ideò, vt, C
V, ad, H N, ita, V B, ad, B N, ergo rectangulum, C V F, ad re-
ctangulum, H N R, idest quadratum, E V, ad quadratum, M N,
erit vt, V B, ad, B N, est autem quadratum, E D, quadruplum
4. Secun. Elem. quadrati, E V, nam est æquale quadratis, E V, V D, & rectangulis
sub, E V D, bis, idest duobus quadratis, E V, quæ cum prædictis
conficiunt quatuor quadrata, E V, & eadem ratione quadratum, M
O, est quadruplum quadrati, M N, ergo quadratum, E D, ad qua-
dratum, M O, erit vt, V B, ad, B N, quæ sunt abscissæ ab ipsa axi,
vel diametro, B V, versus verticem, B, per ipsas, E D, M O, ordi-
natim ad ipsam, B V, applicatas, quod ostendere opus erat; hęc au-
tem vocatur ab Apolonio Parabola.

THEO-

THEOREMA XXXVI. PROPOS. XXXIX.

IIsdem positis, præterquamquod, B V, sit parallela ipsi, A
F, sed posito, quod concurrat cum eodem latere, F A, ver-
sus verticem producto, vt in, Z. Dico quadratum, E D, ad
quadratum, M O, esse vt rectangulum, Z V B, ad rectangu-
lum, Z N B.

Quia enim quadratum, E V, est æquale rectangulo, C V F, &
quadratum, M N, rectangulo, H N R, ideò quadratum, E V, ad 14. Secun. Elem.
quadratum, M N, erit vt rectangulum, C V
F, H N R, rectangulum verò, C V F, ad,
H N R, habet rationem compositam ex ea,
quam habet, C V, ad, H N, (vt infra inde-
pendenter ab hac Proposit. probatur) .i. V B, Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sexti El.
ad, B N, quia trianguli, C V B, H N B, sunt
æquianguli, & ex ea, quam habet, V F, ad,
N R, idest, V Z, ad, Z N, quia trianguli, V
F Z, N R Z, sunt æquianguli, duę verò ra-
tiones, V B, ad, B N, &, V Z, ad, Z N, Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sexti El.
componunt rationem rectanguli, Z V B, ad
rectangulum, Z N B, ergo rectangulum, C
V F, ad rectangulum, H N R, .i. quadratum,
E V, ad quadratum, M N, vel quadratum, E D, ad quadratum, M
O, erit vt rectangulum, Z V B, ad rectangulum, Z N B, quod osten-
dere opus erat; hæc autem ab Apollonio vocatur Hyperbola.

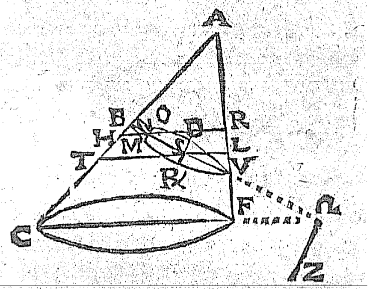


THEOREMA XXXVII. PROPOS. XL.

TAndem eisdem positis, pręterquam dicto concursu, po-
sito, inquam, B V, concurrere cum vtroq; latere trian-
guli per axem, & productum, etiam cum basi trianguli per
axem conuenire, vt in, 2. Dico quadratum, R D, ad qua-
dratum, M O, esse vt rectangulum, V S B, ad rectangulum,
V N B.

Sit ergo talis hic appositum schema, in quo planum figuræ, B R
V D, (cuius axis, vel diameter secat vtraque latera, A C, A F, &
producta incidit in basim, C F, productam in, 2,) extensum indefi-
nitè

nitè secat basis productum planum in recta, z, Z, perpendiculari triangulo per axem, A C F, & sint adhuc per puncta, N, S, ipsi, C
14. Secun. Elem. F, ductæ parallelæ, T L, H R, igitur quadratum, ℞ S, erit equale rectangulo, T S L, & quadratum, M N, æquale rectangulo,
Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sext. El. H N R, at rectangulum, T S L, ad, HNR, habet rationem compositam ex ea, quam habet, T S, ad, H N, .i. S B, ad, B N, quia trianguli, B T S, B H N, sunt æquianguli, & ex ea, quam habet, S L, ad, N R, .i. S V, ad, V N, quia pariter trianguli, S V L, N V R, sunt æquianguli, duę autem rationes, S B, ad,
Ex Sexta lib. 2. seq. vel ex 23. Sexti El. B N, & S V, ad, V N, componunt rationem rectanguli, B S V, ad rectangulum, B N V, ergo rectangulum, T S L, ad, H N R, .i. quadratum, ℞ S, ad quadratum, M N, vel quadratum, ℞ D, ad quadratum, M O, erit vt rectangulum, V S B, ad rectangulum, V N B, quod ostendere opus erat; hæc autem ab Apollonio vocatur Ellipsis.



SCHOLIVM.

Hæc circa sectiones conicas apposui, tum vt quod menti meæ succurrit in lucem proferrem, tum vt elucescat, quam facilè passiones, quæ ab Apollonio in Elementis conicis circa earundem diametros, vel axes quoscumque demonstrantur, circa eos, qui axes, vel diametri principales, siue ex generatione vocantur modo supradicto ostendantur. His tamen contenti ex Apollonio recipiemus pro dictarum sectionum axibus, vel diametris quibuscumq; quod ipse colligit ad finem Prop. 51. primi Conicorum, scilicet.

In Parabola vnamquamque rectarum linearum, quę diametro ex generatione ducuntur æquidistantes, diametrum esse: In hyperbola verò, & ellipsi, & oppositis sectionibus vnamquamque earum, quę per centrum ducuntur, & in parabola quidem applicatas ad vnamquamq; diametrum, ęquidistantes contingentibus, posse rectangula ipsi adiacentia: In hyperbola, & oppositis posse rectangula adiacentia ipsi, quę excedunt eadem figura: In ellipsi autem, quę eadem deficiunt: Postremò quęcumque circa sectiones adhibitis principalibus diametris demonstrata sunt, & alijs diametris assumptis eadem contingere.

Tres

Tres autem proximæ Propositiones etiam in meo Speculo Vstorio descriptæ fuerunt, cum & ibi ijsdem indigerem, has verò hic repetere volui, vt qui meum illud Speculum non viderunt, etiam ijsdem potiri possint: Aliqua tamen ex infrascriptis nunc ex Archimede, & eiusdem Commentatoribus sumemus, vt iam ostensa, ne has demonstrationes, quæ apud præfatos Auctores videri possunt, frustra repetamus.

THEOREMA XXXVIII. PROPOS. XLI.

SI sphęra, vel sphęroides, conoides parabolicum, vel hyperbolicum planis secentur ad axem rectis, communes sectiones erunt circuli diametros in eadem figura ducta per axem (quæ est illa, quę per reuolutionem creat dictum solidum) sitas habentes.

Patet hæc Propositio, nam supradicta sunt solida rotunda, nascuntur .n. ex reuolutione figurarum circa axem. Defin. 6. 34. huius.

THEOREMA XXXIX. PROPOS. XLII.

SI conoides parabolicum plano secetur non quidem per axem, neque æquidistanter axi, neque ad rectos angulos cum axe, communis sectio erit ellipsis, diameter verò ipsius maior erit linea concepta in conoide ab intersectione facta planorum, eius scilicet, quod secat figuram, & eius, quod ducitur recto per axem ad planum secans, minor verò diameter æqualis erit distantiæ linearum ductarum æquidistanter axi ab extremis diametri maioris.

Hæc ostenditur ab Archimede lib. de Conoidibus, & Sphæroidibus p. 13.

THEOREMA XL. PROPOS. XLIII.

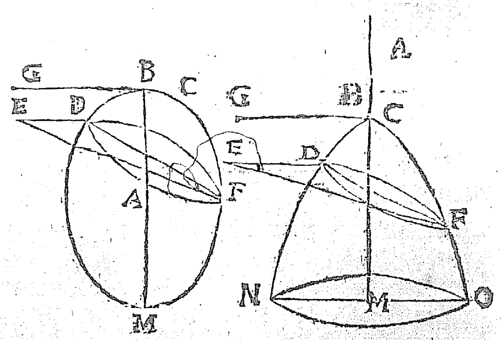
SI conoides hyperbolicum plano secetur coincidente in omnia coni latera conoides compræhendentis non recto ad axem; sectio erit ellipsis, diameter verò maior ipsius erit concepta in conoide à sectione facta planorum, alterius quidem

dem ſecantis figuram, & alterius acti per axem recto ad planum ſecans. Archim. ibid. Propoſ. 14.

THEOREMA XLI. PROPOS. XLIV.

SI ſphæroides plano ſecetur non recto ad axem, ſectio erit ellipſis, diameter verò ipſius maior erit concepta in ſphæroide ſectio duorum planorum, eius ſcilicet, quod ſecat figuram, & eius, quod ducitur per axem recto ad planum ſecans. Arch. ibid. Propoſ. 15.

Minor verò diameter ſic habetur. Sit Sphæroides, vel conoides hyperbolicum, B D M F, axis, B M, centrum, A, ellipſis verò per axem tranſiens in ſphæroide, B D M F, in conoide verò hyperbola, N C O. Secetur autem ſphæroides, vel conoides plano non recto ad axem, ſed erecto figuræ, B D M F, ex quo fiat in ipſis ſectio, D F, hæc erit ellipſis, cuius maior diameter, D F. Inueniatur nunc vertex ellipſis, ſeu hyperbolæ, B D M F,



reſpectu ipſius, D F, qui ſit, C, & iungatur, C B, ac per, B, agatur, B G, tangens in, B, ipſam ellipſim, ſeu hyperbolam, tandem à puncto, D, parallela ipſi, B G, & à puncto, F, parallela ipſi, C B, producantur, D E, F E, quæ inuicem concurrent vt in, E. Dico igitur, quod erit, E D, minor diameter eiuſdem ellipſis, D F.

Hoc autem demonſtrat ibid. Dauid Riualtus in Commentarijs in Archim. ad Propoſ. 14. & 15.

THEO-

THEOREMA XLII. PROPOS. XLV.

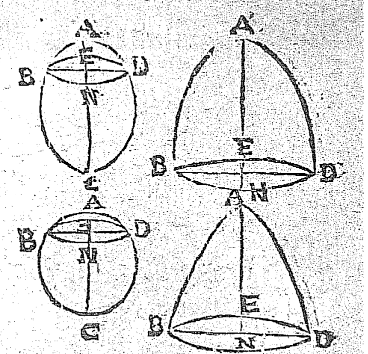
SI ſphæroides, vel conoides parabolicum, ſeu hyperbolicum ſecentur quomodocumq; planis parallelis ad axem rectis, ſiue inclinatis, communes ſectiones ſimiles erunt, & diametri eiuſdem rationis erunt omnes in eadem figura per axem tranſeunte, rectè eaſdem ſecante.

Hæc colliguntur in Coroll. 2. Prop. 15. lib. Arch. de Conoidibus, & Sphæroidibus, & ibidem etiam à Federico Commandino in ſuis in Arch. Comment. demonſtrantur. Hęc verò circa ipſas ſectionum figuras verificari pariter manifeſtum eſt, hoc autem dico, vtor enim iiſdem ſectionum nominibus tamquam figuras ſub ipſis comprehenſas ſignificantibus.

THEOREMA XLIII. PROPOS. XLVI.

EXpoſitis prædictis coni ſectionibus, circulo nempè, Ellipſi, Parabola, & Hyperbola, ſi, quę ad earundem axes ordinatim applicantur, diametri eſſe intelligantur circulorum ab ipſis deſcriptorum, qui ſint erecti planis ipſarum figurarum, peripherię deſcriptorum circulorum in ſectione, quę eſt circulus, erunt omnes in ſuperficie ſphęrę, in Ellipſi verò in ſuperficie ſphæroidis, in Parab. in ſuperficie conoidis parabolici, & in Hyperbola in ſuperficie conoidis Hyperbolici.

Sint prædictę ſectiones figurę ſcilicet, ipſæ, A B C D, earum axes, A C, vna ex ordinatim ad axim applicatis, B D, quæ intelligatur eſſe diameter ab ea deſcripti circuli, B N D E. Dico circumferentiam, B N D E, eſſe in dicta ſuperficie. Intelligantur dictę figuræ reuolui circa ſuos axes, vt ex circulo fiat ſphæra, ex ellipſi ſphæroides, ex parabola conoides parabolicum, & ex hyperbola hyperbolicum, ſecentur autem planis ad axem



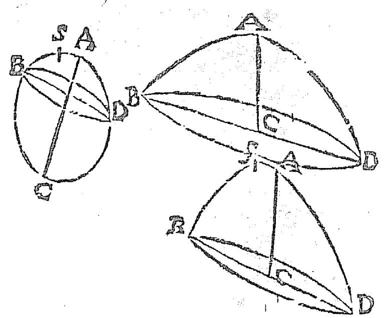
rectis, eundem axem ſecantibus in eodem puncto, in quo deſcriptus cir-

circulus eum ſecat, producetur ergo ab hoc ſecante plano in ipſis ſo-
34.huius. lidis circulus centrum in axe habens, cuius diameter erit, B D, ha-
bemus igitur duos circulos in eodem plano, circa eandem diametrum,
Corol.34. huius. ergo illi erunt congruentes, periphæria autem circuli dicto ſecante
plano in dicto ſolido producti eſt in ſuperficie ambiente dictum ſoli-
dum, ergo, & peripheria circuli, B N D E, deſcripti, vt dictum eſt,
erit in tali ſuperficie, ſcilicet in ſuperficie ſphæræ in figura circuli,
ſphæroidis in figura ellipſis, conoidis parabolici in figura parabolæ,
& hyperbolici in figura hyperbolę, idem oſtendemus de alijs quibuſ-
cumque ſic deſcriptis circulis ab ordinatim applicatis ad dictos axes
tanquam à diametris, qui ſint erecti eiſdem ſectionibus, igitur quod
proponebatur demonſtratum fuit.

THEOREMA XLIV. PROPOS. XLVII.

INFRASCRIPTIS poſitis, eadem adhuc ſequi oſten-
demus.

Iiſdem enim expoſitis figuris, præter circulum, ſupponamus ip-
ſam, A C, non eſſe axem, ſed diametrum, & ad ipſam ordinatim ap-
plicari vtcumque, B D, intelligatur autem, B D, diameter cuiuſdam
ellipſis ab eadem deſcriptæ, quæ ſit erecta plano propoſitæ figuræ,
ſit autem, in figura ellipſis, deſcriptæ ellipſis ſecunda diameter per-
pendicularis ipſi, B D, & æqualis ductæ à puncto, B, parallelę tan-
genti ellipſim, A B C D, in ex-
tremitate eiuſdem axis (quæ
tangat in, S,) interiectæ in-
44.huius. ter, B D, & eam, quę ducitur
à puncto, D, parallela iun-
genti puncta, S, A. In figura
verò hyperbolæ ſit ſecunda
diameter perpendicularis, BD,
& æqualis ei, quæ ducitur à
puncto, D, parallela tangenti
hyperbolam in extremitate a-
xis (vt in, S,) interiectæ in-
ter, B D, & eam, quę ducitur
à puncto, B, parallela iungenti
puncta, S, A, & tandem in parabola ſit ſecunda diameter perpendi-
42.huius. cularis quoque ipſi, B D, & æqualis diſtantiæ parallelarum eiuſdem
axi, quę ducuntur ab extremitatibus ipſius, B, D. Intelligantur dein-
de



de conſtituta conoides, & ſphæroides, in quibus planis per eorum
axes ductis, productæ ſint figuræ iam dictæ, ſecentur deinde planis
ad axem obliquis, ſed erectis ad dictas figuras, & ſint eadem plana
deſcriptarum ellipſium dicta ſolida ſecantia, erunt ergo ex his ſecan-
tibus planis conceptæ in ipſis figuræ pariter ellipſes, quarum diame-
trierunt, B D, quidem prima, ſecunda autem in ſphæroide æqualis
ductæ à puncto, B, parallelæ tangenti ellipſim in, S, interiectæ in-
ter ipſam, B D, & ductam à puncto, D, parallelam iungenti pun-
cta, S, A, (in cęteris autem ſolidis eadem ſuo modo verificabuntur) 44.huius.
ergo in ſphæroide ipſa, B D, eſt prima diameter dictæ ellipſis, quæ
à dicto ſecante plano producitur, & eſt etiam prima diameter ellipſis,
quę deſcribitur modo ſupradicto, ſunt autem ſecundę diametri vtriuſ-
que ellipſis ęquales, immo communes, quia ad rectos angulos ſecant
ipſam, B D, ergo habemus in eodem plano duas ellipſes circa ea-
ſdem diametros coniugatas, ergo neceſſariò erunt congruentes, ſed
linea ellipſis, quę eſt communis ſectio dicti plani, & ſuperficiei ſphę- Elicietur
roidis eſt in ſuperficie ſphæroidis, ergo, & linea ellipſis vt ſupra de- ex Corol.
ſcriptæ erit in ſuperficie dicti ſphæroidis. Eodem modo idem de cæ- 25.huius.
teris ellipſibus ſimiliter deſcriptis demonſtrabimus tum in ſphæroide,
tum etiam in conoidibus parabolicis, & hyperbolicis, quę oſtendere
opus erat.

COROLLARIVM.

HInc patet propoſito aliquo ex ſupradictis ſolidis, eoq; ſecto planis vtcumque parallelis ad axem rectis, ſiue obliquis figuras, quæ ex ſectione planorum in ipſis ſolidis producuntur, eaſdem eſſe illis, quæ deſcribuntur lineis rectis, tamquam homologis diametris, & primis, ijs, inquam, quæ ſunt communes ſectiones dictarum æquidiſtantium figurarum, & figuræ, quæ produceretur ducto plano per axem rectè eas ſecante, quæ deſcribentes eſſent, quæ ordinatim applicantur ad axes, vel diametros dictarum figurarum, ſecundis autem diametris deſcriptarum figurarum exiſtentibus, ijs, quæ ſupradictæ ſunt, prout poſtulat varietas ſolidorum, iuxta Prop. 42. 43. & 44. huius.

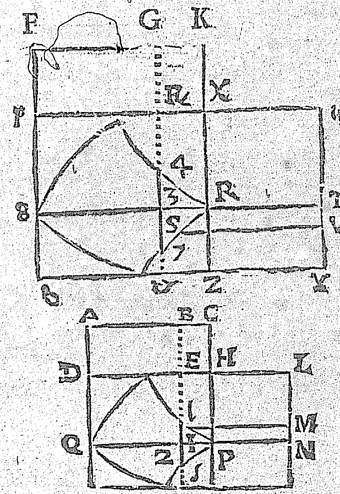
SCHOLIVM.

ADuerte tamen licet ſupra vocentur diametri, quæ dictas figuras deſcribunt, debere tamen intelligi ſemper eſſe axes deſcriptarum figurarum, cum .n. nomen diametri ſit commune diametro, & axi, aliquando vice axis vtimur nomine diametri, vt in circulo apparet, cuius tamen omnes diametri ſunt axes: Inſuper ſciendum eſt etiam, quæ circa *hyperbolam hic habentur, circa sectiones oppositas, quarum communes sunt dictæ passiones, quoq; intelligi posse. Eadem verò nedum in dictis integris solidis, sed etiam in eorum portionibus, siue in portionibus sectionum coni abscissis per lineas ad earum axim, vel diametrum ordinatim ductas, pariter verificari manifestum est.*

LEMMA.

PRopositis duabus quibuscumq; similibus figuris, duæ quæuis rectæ lineæ earum homologę poterunt esse incidentes, vel in ipsis productis reperientur saltem earum incidentes, & oppositarum tangentium, quibus ipsæ incidunt ad eundem angulum ex eadem parte, erunt autem dictæ homologæ semper inuentarum incidentium partes proportionales.

Sint duæ quæcunq; similes figuræ planæ, l Q s P, 4 8 7 R, in eisque duæ quælibet homologę, l s, 4 7. Dico has esse vel incidentes, vel in eisdem productis reperiri posse incidentes prædictarum figurarum, & oppositarum tangentium, quibus occurrant ipsæ homologæ, productæ, ad eundem angulum ex eadem parte, quales sint, D L, d O; p u, g Y. Ducantur autem vlterius oppositę tangentes, quę sunt regulæ homologarum,



l s, 4 7, ipsæ, A d, C o; F
Corol.19. & p.24. g, K Z, quarum, & dictarum figurarum incidentes
23.huius. sint, A C, F K, parallelæ ipsis, D L, p u, hoc .n. fieri
Coroll. 2.19.& p. 24. potest; erunt autem etiam ipsæ, d O, g Y, regulæ homologarum, cum faciant angulos æquales cum regulis, d A, g F, vt suppono, & inueniri poterunt earum, & dictarum figurarum incidentes parallelæ eisdem, A d, F g, sint ipsę, L O, u Y, tales incidentes: Vel ergo homologæ datæ, l s, 4 7, terminantur ad oppositas tangentes, D L, d O; p u, g Y, vel non, & tunc producantur, & ipsis incidant in punctis, E, F; ℞, &, & vlterius productæ vsque ad, A C, F K, secent ipsas in punctis, B, G. Vlterius vel, H o, X Z, tangunt se totis, vel aliqua tan-

tantum sui parte, vel in vno puncto tantum, prędictas figuras, tangant in punctis tantum, P, R, & ab ipsis ducantur parallelę regulis, d O, g Y, ipsæ, P N, R T, occurrentes incidentibus, L O, u Y, in punctis, N, T, dico, L N, u Y, similiter ad eandem partem secari in, N, T, si .n. hoc non sit, diuidatur, L O, in, M, similiter ad eandem partem, ac diuiditur, u Y, in, T, & per, M, extendatur, M I, parallela, d O, incidentes ambitui figuræ in, I, & rursus secetur, u Y, in, V, similiter ad eandem partem, vt secatur, LO, in, N, quia ergo, N, est intra puncta, M, O, etiam, V, erit inter puncta, T, Y; ducatur tandem, V S, parallela, g Y, incidens ambitui figurę in, S. Quia igitur, M I, non incidit in punctum contactus rectæ, H o, cum figura, erit, M I, maior, N P, eadem ratione ostendemus, S V, fore maiorem ipsa, R T, est enim, RT, minima earum, quæ ab incidente, u Y, ad ambitum figuræ duci possunt æquidistanter ipsi, g Y. Cum verò, I M, R T, similiter diuidant, & ad eandem partem ipsas incidentes, L O, u Y, erit, I M, ad, R T, vt, L O, ad, u Y, Defin. 10.
idest vt, P N, ad, S V, ergo, permutando, I M, ad, P N, erit vt, huius.
R T, ad, S V, est autem, I M, maior, P N, ergo etiam, R T, erit maior, S V, sed etiam minor, quod est absurdum, ergo falsum est ipsas, P N, R T, non secare similiter ad eandem partem ipsas, L O, u Y, sic igitur easdem diuidunt, eritque, P N, ad, R T, hoc est, H L, ad, X u, vt, L O, ad, u Y, idem ostendemus etiam si contactus esset in parte linearum, H o, X Z, seu in totis eisdem lineis, vt consideranti facilè innotescet. Eadem autem methodo probabimus etiam, D L, p u, esse vt ipsas, L O, u Y, ergo residuæ, D H, p X, hoc est, A C, F K, erunt vt, L O, u Y, idest vt, E 4, ℞ &, sed, A C, F K, similiter sunt diuisę ab homologis, s l, 7 4, productis, in punctis, B, Defin. 10.
G, ergo, A B, ad, F G, idest, D E, ad, p ℞, erit vt, A C, ad, F huius.
K, idest vt, E 4, ad, ℞ &. Extendantur, N P, T R, quę diuidunt, L O, u Y, similiter ad eandem partem, secentque ipsos, E 4, ℞ &, in punctis, 2, 3, incidat autem, N Q, in, Q, punctum contactus lineæ, A d, cum figura, ostendemus, vt factum est circa ipsas, N P, T R, etiam, T 8, incidere in punctum contactus rectę, p g, cum figura, quod sit ipsum, 8, quoniam ergo probatum est, D E, ad, p ℞, esse vt, E 4, ad, ℞ &, erit etiam, Q 2, ad, 8 3, vt, E 4, ad, ℞ &. Similiter probabimus, 2 P, ad, 3 R, esse vt, E 4, ad, ℞ &, & diuidunt ipsas, E 4, ℞ &, similiter ad eandem partem, à quibus vicissim secantur ad eundem angulum ex eadem parte, cum, E 4, ℞ &, sint parallelæ ipsis, L O, u Y, ergo, E 4, ℞ &, erunt incidentes similium figurarum, P l Q s, R 4 8 7, & oppositarum tangentium, 24.huius.
D H, d o, p X, g Z, quod etiam verificaretur de ipsis homologis, l s, 4 7, si fuissent ad oppositas tangentes terminatę in punctis, E, 4, ℞,

&. Modò etiam si ad illa puncta non terminentur dico tamen, l s, ad, E 4, esse vt, 4 7, ad, ℞ &, etenim, l s, ad, 4 7, est vt, A C, ad, E 4, esse vt, 4 7, ad, ℞ &, vt probatum est, ergo permutando, l s, ad, E 4, erit vt, 4 7, ad, ℞ &, quod ostendere oportebat.

COROLLARIVM.

ET quoniam probatum est, l s, ad, 4 7, esse vt, E 4, ad, ℞ &, seu vt, LO, ad, u Y, vt autem, LO, ad, u Y, ita duæ homologæ, Q P, ad, 8 R, ideò duæ homologæ, l s, 4 7, sunt inter se, vt duæ homologæ, Q P, 8 R, & cum oppositæ tangentes, D L, d O, p u, g Y, ductæ sint vtcumque, licet ad eundem angulum ex eadem parte cum ipsis, E 4, ℞ &, ideò duæ homologæ, l s, 4 7, erunt vt quæcumq; aliæ duæ homologæ quibusuis regulis assumptæ, vel vt earum incidentes, immo & ipsæ incidentes, erunt inter se, vt quæuis aliæ duæ incidentes, ostensum .n. est, A C, ad, F K, esse vt, L O, ad, u Y.

THEOREMA XLV. PROPOS. XLVIII.

SI sint duæ similes figuræ planæ, quarum sint ductæ oppositæ tangentes, quæ sunt homologarum earundem regulæ, per quas extendantur duo plana vtcumque inuicem parallela, ęque ad eandem partem ijsdem inclinata, deinde sumptis duabus quibuslibet homologis illæ describere intelligantur figuras planas similes, ductis primò planis æquidistantes, ita vt sint similiter descriptæ, & describentes earum lineæ, vel latera homologa, idem autem contingat cæteris homologis, etiam si omnes figuræ descriptæ seorsim in vnaquaque propositarum figurarum non essent similes; Solida, quę ab ijsdem tanguntur oppositis planis, in quibus ex traiectione planorum præfatis oppositis tangentibus æquidistantium eædem figuræ produci possunt, erunt similia, & figuræ descriptæ eorundem homologæ figuræ, & earum regulę ipsa opposita tangentia plana, quorum & dictorum solidorum figuræ incidentes erunt primò propositæ figuræ.

Hæc

Hæc Propositio manifesta est, inuoluit .n. requisita omnia definitionis similium solidorum; nam hic habemus duo solida, ea nempè, Defin. 11. huius.
quæ secantur planis dictarum figurarum, quorum duo extrema siue primo ducta æquidistantia plana talia sunt, vt illis incidant duo plana (in quibus nempè reperiuntur propositæ figuræ similes, quarum homologarum regulę sunt communes sectiones earum, & dictorum oppositorum planorum tangentium) ad eundem angulum ex eadem parte, sunt autem figuræ planę descriptæ lineis, vel lateribus homologis propositarum figurarum inter se similes, illæ .s. quæ secant incidentes propositarum figurarum, & subinde altitudines dictorum solidorum similiter ad eandem partem, & æquidistant dictis tangentibus planis, respectu quorum altitudines dictas assumptas intelligo; 17. Vndec. Elem.
& quia supponimus omnium descriptarum similium figurarum latera homologa describentia esse lineas, vel latera homologa similium figurarum, quæ omnia sunt inter se æquidistantia, ideò omnes earum lineæ homologæ duabus quibusdam regulis æquidistabunt, & ipsa latera describentia erunt etiam lineæ incidentes, vel in eisdem productis saltem reperiri poterunt incidentes descriptarum similium figurarum, & oppositarum tangentium duabus quibusdam semper ęquidistantium, scilicet eis, quę cum dictis incidentibus angulos continent ęquales (erunt autem dicta latera homologa incidentes, si dictæ tangentes transeant per extrema laterum describentium, si autem non, poterunt tamen in ipsis lateribus productis assumi earundem incidentes, quæ erunt, vt ipsa latera homologa) & cum ipsæ propositæ figuræ sint similes, subinde etiam erunt similes illæ, quæ capient omnes dictas incidentes, si forte accidat ipsa latera homologa describentia non esse incidentes, vt dictum est, igitur adsunt hic omnes conditiones definitionis meæ similium solidorum, ergo solida, in quibus dictæ similes descriptæ figuræ ex traiectione dictorum planorum producuntur, erunt similia, & regulæ figurarum homologarum erunt dicta plana tangentia, & eorum, ac dictorum solidorum figuræ incidentes, propositæ primò figuræ, vel aliæ in eisdem planis inuentæ, illæ scilicet, in quibus iacent omnium similium descriptarum figurarum lineæ incidentes, quod ostendere opus erat. Corol. 23 huius. Ex Lem. antec.

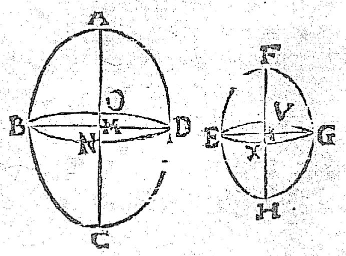
COROLLARIVM.

HInc apparet si descriptæ figuræ omnes sint inter se similes, dicta solida pariter esse similia. Vnde si intelligamus similes coni sectionum portiones, siue easdem integras, circa axes, vel diametros, & ab ordinatim applicatis ad axim, vel diametrum, earundem describi similes figuras planas eisdem sectionum portionibus erectas, tanquam à lineis,

*lineis, vel lateribus homologis deſcriptarum figurarum; ſolida, in qui-
bus deſcriptæ figuræ ex traiectis planis producentur (quæ in ſequenti li-
bro dicuntur, ſolida ad inuicem ſimilaria genita ex dictis ſectionum por-*
C.Def.8. lib.2. *tionibus) erunt ſimilia, & figurarum homologarum eorundem regulæ
oppoſita tangentia plana dictis iam deſcriptis figuris æquidiſtantia, quo-
rum & dictorum ſolidorum figuræ incidentes erunt dictæ ſectionum por-
tiones, vel in earum planis iacebunt. Vnde colligimus omnes ſphæras
eſſe ſimiles, nam ſi ſecentur planis per axem, conceptæ figuræ fiunt ſimi-*
Lẽma 31. huius pr. *les, ideſt circuli, quod ſi ſecentur adhuc planis ad horum circulorum pla-
na erectis, productæ figuræ fiunt pariter circuli deſcripti tanquam dia-*
33.huius. *metris eiſdem rectis lineis, in quibus coincidunt circulis per axem du-*
34.huius. *ctis, quæ diametri ſunt etiam incidentes eorundem deſcriptorum circu-
lorum, & oppoſitarum tangentium per eorum extrema ductarum, quæ*
Lẽma 31. huius. *tangentes omnes inter ſe æquidiſtant, vt facilè patet, & ſunt iſtæ inci-
dentes, ſiue diametri deſcriptorum circulorum, quæ axem diuidunt ſi-
militer ad eandem partem, vt ipſi axes, igitur ſphæræ omnes ſunt ſimi-*
Lẽma 31. huius. *les, & ductis duobus planis oppoſitis tangentibus vtcumq; & per axem,
qui iungit puncta contactuum ductis planis, hinc effecti circuli erunt
figuræ incidentes dictorum tangentium, & ſphærarum, & dicta plana
tangentia erunt regulæ homologarum figurarum earundem, vnde tan-
dem patet quoſuis circulos in ſphæris per centrum tranſeuntes poſſe eſſe
figuras incidentes earundem ſphærarum, & planorum oppoſitorum tan-
gentium ſphæras in extremis punctis diametrorum quorumuis dictorum
circulorum per centrum tranſeuntium.*

THEOREMA XLVI. PROPOS. XLIX.

Poſita definitione particulari ſimilium ſphæroidum, ſe-
quitur & generalis ſimilium ſolidorum.

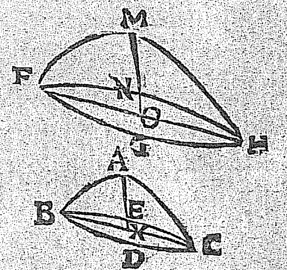


Sint ſimiles ſphæroides iuxta definitionem particularem de ipſis allatam, A B C D, F E H G. Dico has eſſe ſimiles iuxta definitionem generalem ſimilium ſolidorum; ductis enim planis per axes, A C, F H, producantur in eiſdem el-
33.huius. 28.huius. lipſes, A B C D, F E H G, quæ erunt eædem illis, ex quarum reuolutione circa axes, A C, F H, oriun-

tur dictæ ſphæroides, & proinde erunt ſimiles tum iuxta definit. Apollonij, tum iuxta definit. 10. huius. Et quoniam ſi ſecentur planis ad axem rectis in dictis ſphæroidibus gignuntur circuli, vt ex. gr. B N D O, E X G V, (qui ſecent axes, A C, F H, ſimiliter ad ean- 34.huius.
dem partem in punctis, M, I,) quorum diametri ſunt communes ſectiones cum figuris per axem tranſeuntibus, vt ipſæ, B D, B G, ideò iſtæ erunt incidentes ipſorum circulorum, B N D O, E X G V, & Lẽma 31. huius.
oppoſitarum tangentium in punctis, B, D; E, G; quod etiam de cæteris intelligemus. Ergo ſi per axium, A C, F H, extrema ducta ſint duo oppoſita tangentia plana, quæ erunt circulis, B N D O, E X G V, parallela, habebimus plana ellipſium, A B C D, F E H G, illis incidentia ad eundem angulum ex eadem parte; nam ad illa ſunt erecta, in quibus reperientur ſimiles figuræ, ellipſes nempè iam dictæ, & homologarum earundem regulæ erunt communes ſectiones earundem productorum planorum cum oppoſitis tangentibus planis, quæ homologæ erunt incidentes homologarum figurarum (quarum regulæ ſunt dicta tangentia plana) & oppoſitarum tangentium per earundem extrema ductarum, quæ ſemper duabus quibuſdam regulis æquidiſtabunt. Ergo dictæ ſphæroides ſimiles erunt iuxta defin. 10. huius, & earum, ac dictorum oppoſitorum tangentium planorum figuræ incidentes erunt eædem ellipſes, A B C D, F E H G, per axes tranſeuntes, quod &c.

THEOREMA XLVII. PROPOS. L.

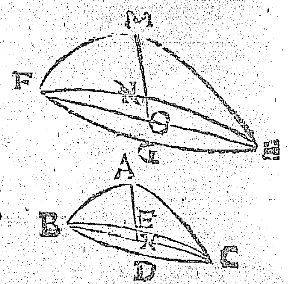
Poſita definitione ſimilium portionum ſphærarum, vel ſphæroidum, aut conoidum, ſiue earundem portionum, ſequitur etiam definitio generalis ſimilium ſolidorum.



Def. 9.

Sint ſolida, F M H, B A C, ſimiles portiones ſphærarum, vel ſphæroidum, vel ſimiles conoides, ſeu conoidum portiones iuxta particularem definitionem de illis allatam. Dico eadem eſſe ſimilia iuxta definitionem generalem ſimilium ſolidorum. Baſes ergo erunt vel circuli, vel ſimiles ellipſes, nempè, F G H N, B D C E, ductis autem planis per axes ad rectos angulos baſibus fiant in ipſis figuræ, F M H, B A C, quæ erunt ſimiles ſectionum coni portiones, & earum baſes, F H, B C,
erunt

erunt axes baſium eorundem ſolidorum, ipſarum nempè figurarum,
Elicitur ex 37. huius. FGHN, BDCE, ſunt .n. ſolida rotunda, & plana, FMH, BA
C, per axes tranſeuntia ſunt baſibus erecta. Sint autem ſolidorum
iam dictorum axes, necnon axes, ſeu diametri figurarum, FMH,
BAC, ipſæ, OM, XA. Quia ergo figuræ, FMH, BAC, ſunt
ſimiles portionum coni ſectiones, quarum baſes, ſiue ad earum axes,
vel diametros, MO, AX, ordinatim applicatæ ſunt, FH, BC, e-
runt homologarum earundem regulæ, ac tangentes ipſas figuras ex
vna parte, ex alia verò, quo per vertices, M, A, eiſdem ducentur æ-
quidiſtantes, earundem verò oppoſitarum tangentium, ac ipſarum
48. huius. figurarum incidentes, MO, AX, eritque, FH, ad, BC, vt, MO,
ad, AX. Si ergo baſes, FGHN, BDCE, ſint circuli erunt figuræ
Lēma 31. huius. ſimiles, quarum & oppoſitarum tangentium per extrema, FH, du-
ctarum incidentes fient diametri, FH, BC. Si verò ſint ſimiles el-
lipſes, quoniam, FH, BC, ſunt axes,
facilè probabimus, ſicut pro circulo fa-
ctum eſt ad Lemma Propoſ. 31. huius,
auxilio Propoſ. 40. huius, ipſas, FH,
BC, eſſe incidentes ſimilium figurarum,
FGHN, BDCE, & oppoſitarum
tangentium, quæ per puncta, F, H; B,
C, ducuntur (quæ ipſis, FH, BC, exi-
ſtent perpendiculares, cum ſint axes ea-
rundem figurarum.) Et eodem modo
ſi dicta ſolida ſecentur alijs planis præ-
fatis baſibus parallelis (ita tamen vt illa
diuidant ſimiliter ad eandem partem ip-



17. Vnd. Elem. ſas, MO, AX, & ſubinde etiam altitudines ipſorum ſolidorum re-
ſpectu dictarum baſium aſſumptas) oſtendemus & productas in ſo-
lidis figuras eſſe ſimiles, & earum, ac oppoſitarum tangentium (æ-
quidiſtantium tanquam regulis duabus oppoſitis tangentibus ba-
ſium, FH, BC, per extrema, F, H; B, C, iam ductarum) inci-
dentes eſſe communes ipſarum ſectiones cum figuris, FMH, BAC,
quæ omnes erunt lineæ homologæ ſimilium figurarum, FMH, B
AC, quarum regulæ, FH, BC. Ergo, ductis per, M, A, duobus
planis baſibus parallelis, quæ ipſa ſolida contingent, incidunt hiſce
oppoſitis tangentibus planis ad eundem angulum ex eadem parte
plana figurarum, FMH, BAC, ſectis autem ſolidis planis paralle-
lis, vt dictum eſt, fiunt in ipſis ſimiles figuræ planæ, & earum inci-
dentes capiuntur omnes in ſimilibus figuris, FMH, BAC, quarum
ſunt homologæ, earumque regulæ ipſæ, FH, BC, & lineæ homo-
logæ figurarum homologarum duabus quibuſdam regulis, vtpotè
oppo-

oppoſitis tangentibus baſium, FGHN, BDCE, iam dictis, om-
nes æquidiſtant, ergo ſolida, FMH, BAC, ſunt ſimilia iuxta de-
fin. 11. huius, & earum, ac oppoſitorum tangentium planorum iam
dictorum, figuræ incidentes ſunt ipſæ, FMH, BAC, quod erat o-
ſtendendum.

COROLLARIVM I.

*Hinc etiam non difficile intelligi poteſt, propoſitis duabus coni ſi-
milibus ſectionibus, FMH, BAC, quarum axes, vel diametri
ſint, MO, AX, ac poſito ipſas, FH, BC, tanquam axes deſcribere cir-
culos, ſeu ſimiles ellipſes erectas planis figurarum, FMH, BAC, &
cæteras omnes ordinatim applicatas ad ipſas, MO, AX, vel circulos,
vel ſemper ſimiles ellipſes deſcribere, vt dictum eſt, ſolida in cuius ſu-
perficie capiuntur omnes peripheriæ circulorum, vel ſimilium ellipſi-
um, eſſe ſimiles portiones ſphærarum, vel ſimiles ſphæroides, vel conoi-
des, earumuè portiones, ſimiles inquam nedum iuxta defin. 11. huius,
hoc .n. habetur ex 48. huius, ſed etiam iuxta defin. 9. habentur .n. hic
omnes iſtius conditiones, vt examinanti facilè apparebit, quod eſt con-
uerſum eius, quod in præſenti Theor. propoſitum fuit. Hoc autem con-
uerſum etiam in reliquis Theorematibus, in quibus definitiones particu-
lares ſimilium planarum, vel ſolidarum figurarum cum generalibus o-
ſtendimus concordare, poterat demonſtrari, ſed cum in ſequentibus libris
vel nullam, vel ſaltem non neceſſariam occaſionem viderem me huius
habiturum eſſe, & cum etiam facilè hoc ſtudioſus, qui rectè priores pro-
poſitiones intellexit, deducere poſſit, propterea ne longior fierem, con-
ſultò hoc prætermiſi, quod tamen verum eſſe minimè dubito, & propte-
rea hoc etiam pro vero ſuppoſito infraſcriptum Coroll. ſubiungere volui.*

COROLLARIVM II.

*Vlterius ergo cum hucuſque ſatis manifeſtum ſit, definitiones par-
ticulares ſimilium planarum, vel ſolidarum figurarum, cum de-
finitionibus generalibus 10. nempè, & 11. huius concordare, ideò in ſe-
quentibus vtriuſq; definitionis, tam particularis ſcilicet quam generalis,
prout libuerit, hypoteſi nos vti poſſe ex hoc colligemus.*

SCHOLIVM.

NE miretur autem Lector si in hoc quasdam propositiones assumpserim tamquam veras, quæ in sequenti Libro demonstrantur, quales præcipuè esse potuerunt Propos. 5. 6. 7. & 8. lib. sequentis, has [illegible] accepi tamquam in Elementis iam demonstratas, licet potuissent etiam desumi ex seq. Lib. 2. cùm ipsæ non penderent ex hic demonstrandis, ne fieret petitio principij, vt suis locis admonui in præsenti Libro; placuit tamen easdem Propos. noua mea methodo indiuisibilium etiam demonstrare, vt ex ea, tamquam ex herculeo cornu, quanta sit manans demonstrationum affluentia passim digito demonstrarem.

Finis Primi Libri.

GEO-